Chapitre 2 – Correction des exercices

Fonction inverse

Exercice 1 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes toutes définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$
- $g(x) = \frac{2}{x}$
- $h(x) = -x^2 - \frac{3}{x}$
- $k(t) = 3t - 2 + \frac{1}{t}$
- $j(x) = 2x + \frac{5}{x}$
- $q(x) = 7x^2 - 2x + 6 + \frac{4}{x}$
- $p(x) = x^2 + \frac{1}{x}$
- $L(x) = 3x^2 - 5x + 2 + \frac{1}{x}$
- $M(x) = -2x^3 + 4x^2 + \frac{1}{x} + 1$

Correction de l'exercice 1

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{x} \\ f'(x) &= 1 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(t) &= 3t - 2 + \frac{1}{t} \\ k'(t) &= 3 - 0 - \frac{1}{t^2} \\ &= 3 - \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + \frac{1}{x} \\ p'(x) &= 2x - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{x} \\ g'(x) &= 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j(x) &= 2x + \frac{5}{x} \\ j'(x) &= 2 + 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2 - \frac{5}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(x) &= 3x^2 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \\ L'(x) &= 3 \times 2x - 5 - \frac{1}{x^2} \\ &= 6x - 5 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -x^2 - \frac{3}{x} \\ h'(x) &= -2x - 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -2x + \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q(x) &= 7x^2 - 2x + 6 + \frac{4}{x} \\ q'(x) &= 7 \times 2x - 2 + 4\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 14x - 2 - \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x) &= -2x^3 + 4x^2 + \frac{1}{x} + 1 \\ M'(x) &= -2 \times 3x^2 + 4 \times 2x - \frac{1}{x^2} \\ &= -6x^2 + 8x - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 : **Non fait**

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

1) Dériver la fonction f.

2) Dresser le tableau de signes de la fonction f' et en déduire le tableau de variations de f.

Exercice 3 :

Soit g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = 0,25x + \frac{1}{x}$.

1) Dériver la fonction g.

2) Dresser le tableau de signes de la fonction g' et en déduire le tableau de variations de g.

Correction de l'exercice 3

Rappel : $\mathbb{R}_+^* = \left]0\,;\,+\infty\right[$ c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $x > 0$.

1) On a $g(x) = 0{,}25\,x + \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi : $\quad g'(x) = 0{,}25 - \dfrac{1}{x^2}$.

2) Étudions le signe de g' sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\color{blue}{g'(x) \leqslant 0} &\iff 0{,}25 - \frac{1}{x^2} \leqslant 0 \\
&\iff 0{,}25 \leqslant \frac{1}{x^2} \\
&\iff \frac{1}{0{,}25} \geqslant x^2 \qquad \text{On inverse donc on change le sens de l'inégalité} \\
&\iff 4 \geqslant x^2 \\
&\iff \color{red}{2 \geqslant x} \qquad \text{En prenant la racine carrée}
\end{aligned}$$

On en déduit de que g' est négative lorsque $x \leqslant 2$, et donc que g' est positive lorsque $x \geqslant 2$.

x	0		2		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		↘	$g(2)$	↗	

Exercice 4 :

Une petite entreprise artisanale fabrique des répliques d'objets antiques. Au maximum, elle peut en produire 25 par jour.

Le **coût total** de production (en €) dépend du **nombre x** d'objets fabriqués. Il est donné par la fonction de coût exprimée ainsi :

$$C_T(x) = 0,1x^2 + 30x + 40.$$

Le **coût unitaire** d'un produit est donné par la fonction : $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$.

Objectif : Le but de cet exercice est d'optimiser la production ; c'est-à-dire déterminer quelle quantité d'objets il faut produire par jour afin d'obtenir un coût unitaire le plus faible possible.

1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction C_M ?

2) À combien s'élèves les coûts fixes quotidiens ?

3) Quel est le coût de production d'un objet si la production est de 10 unités ? Et de 15 unités ?

4) Dériver la fonction C_M.

5) Dresser le tableau de signe de $\boldsymbol{C'_M}$ et en déduire les variations de C_M.

6) Conclure.

Correction en page suivante.

Correction de l'exercice 4

Données : $C_T(x) = 0{,}1x^2 + 30x + 40, \quad C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x} = 0{,}1x + 30 + \dfrac{40}{x}.$

1) D'après l'énoncé la production maximale est de 25. De plus on produit au minimum 0 réplique, mais puisqu'on ne peut pas diviser par 0, l'ensemble de définition de C_M est $\mathcal{D} = \left]0;25\right]$.

2) Les coûts fixes correspondent aux charges restantes même lorsqu'on produit **0 réplique** d'objets antiques, donc $\boldsymbol{C_T(0)}$. Or $C_T(0) = 40$ donc les coûts fixes quotidiens valent 40 €.

3) On souhaite déterminer le coût unitaire d'une seule réplique lorsqu'on en produit au total 10 (ou 15). Par conséquent on utilise la fonction C_M.

$$C_M(10) = 0{,}1 \times 10 + 30 + \frac{40}{10} = 1 + 30 + 4 = 35\,€$$

$$C_M(15) = 0{,}1 \times 15 + 30 + \frac{40}{15} = 1{,}5 + 30 + \frac{8}{3} = \frac{205}{6} \approx 34,17\,€$$

4) On dérive la fonction C_M pour tout $x \in \left]0;25\right]$.

$$C'_M(x) = 0{,}1 + 0 - \frac{40}{x^2} = \boxed{0,1 - \frac{40}{x^2}}$$

5) Étudions le signe de C'_M.

$$\begin{aligned}
C'_M(x) \leqslant 0 &\iff 0,1 - \frac{40}{x^2} \leqslant 0 \\
&\iff 0{,}1 \leqslant \frac{40}{x^2} \\
&\iff \frac{1}{0{,}1} \geqslant \frac{x^2}{40} \qquad \text{On inverse donc on change le sens de l'inégalité} \\
&\iff 10\times 40 \geqslant \frac{x^2}{40}\times 40 \\
&\iff 400 \geqslant x^2 \\
&\iff 20 \geqslant x \qquad \text{En prenant la racine carrée}
\end{aligned}$$

On en déduit de que C'_M est négative lorsque $x \leqslant 20$, et donc que C'_M est positive lorsque $x \geqslant 20$.

x	0		20		$+\infty$
Signe de $C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de C_M		$\searrow$	$C_M(20)$	$\nearrow$	

6) Conclusion. Le coût unitaire est minimal pour $\boxed{x = 20}$ objets par jour.

De plus $C_M(20) = 0{,}1 \times 20 + 30 + \dfrac{40}{20} = 2 + 30 + 2 = \boxed{34}$ ce qui veut dire que le coût unitaire minimal est de 34 €.