

Chapitre 2 – Correction des exercices

Fonction inverse

Exercice 1 :

Calculer les dérivées des fonctions suivantes toutes définies sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\bullet f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$\bullet g(x) = \frac{2}{x}$$

$$\bullet h(x) = -x^2 - \frac{3}{x}$$

$$\bullet k(t) = 3t - 2 + \frac{1}{t}$$

$$\bullet j(x) = 2x + \frac{5}{x}$$

$$\bullet q(x) = 7x^2 - 2x + 6 + \frac{4}{x}$$

$$\bullet p(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$\bullet L(x) = 3x^2 - 5x + 2 + \frac{1}{x}$$

$$\bullet M(x) = -2x^3 + 4x^2 + \frac{1}{x} + 1$$

Correction de l'exercice 1

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$k(t) = 3t - 2 + \frac{1}{t}$$
$$k'(t) = 3 - 0 - \frac{1}{t^2}$$
$$= 3 - \frac{1}{t^2}$$

$$p(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$
$$p'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

$$g(x) = \frac{2}{x}$$
$$g'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -\frac{2}{x^2}$$

$$j(x) = 2x + \frac{5}{x}$$
$$j'(x) = 2 + 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 2 - \frac{5}{x^2}$$

$$L(x) = 3x^2 - 5x + 2 + \frac{1}{x}$$
$$L'(x) = 3 \times 2x - 5 - \frac{1}{x^2}$$
$$= 6x - 5 - \frac{1}{x^2}$$

$$h(x) = -x^2 - \frac{3}{x}$$
$$h'(x) = -2x - 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= -2x + \frac{3}{x^2}$$

$$q(x) = 7x^2 - 2x + 6 + \frac{4}{x}$$
$$q'(x) = 7 \times 2x - 2 + 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 14x - 2 - \frac{4}{x^2}$$

$$M(x) = -2x^3 + 4x^2 + \frac{1}{x} + 1$$
$$M'(x) = -2 \times 3x^2 + 4 \times 2x - \frac{1}{x^2}$$
$$= -6x^2 + 8x - \frac{1}{x^2}$$

Exercice 2 : Non fait

Soit f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = 3 - \frac{1}{x}$.

1) Dériver la fonction f .

2) Dresser le tableau de signes de la fonction f' et en déduire le tableau de variations de f .

Exercice 3 :

Soit g définie sur \mathbb{R}_+^* par $g(x) = 0,25x + \frac{1}{x}$.

- 1) Dériver la fonction g .
- 2) Dresser le tableau de signes de la fonction g' et en déduire le tableau de variations de g .

Correction de l'exercice 3

Rappel : $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $x > 0$.

1) On a $g(x) = 0,25x + \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi : $g'(x) = 0,25 - \frac{1}{x^2}$.

2) Étudions le signe de g' sur \mathbb{R}_+^* .

$$g'(x) \leq 0 \iff 0,25 - \frac{1}{x^2} \leq 0$$

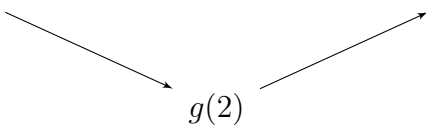
$$\iff 0,25 \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\iff \frac{1}{0,25} \geq x^2 \quad \text{On inverse donc on change le sens de l'inégalité}$$

$$\iff 4 \geq x^2$$

$$\iff 2 \geq x \quad \text{En prenant la racine carrée}$$

On en déduit de que g' est négative lorsque $x \leq 2$, et donc que g' est positive lorsque $x \geq 2$.

x	0	2	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	—	0	+
Variations de g			

Exercice 4 :

Une petite entreprise artisanale fabrique des répliques d'objets antiques. Au maximum, elle peut en produire 25 par jour.

Le **coût total** de production (en €) dépend du **nombre x** d'objets fabriqués. Il est donné par la fonction de coût exprimée ainsi :

$$C_T(x) = 0,1x^2 + 30x + 40.$$

Le **coût unitaire** d'un produit est donné par la fonction : $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x}$.

Objectif : Le but de cet exercice est d'optimiser la production ; c'est-à-dire déterminer quelle quantité d'objets il faut produire par jour afin d'obtenir un coût unitaire le plus faible possible.

- 1) Quel est l'ensemble de définition de la fonction C_M ?
- 2) À combien s'élèvent les coûts fixes quotidiens ?
- 3) Quel est le coût de production d'un objet si la production est de 10 unités ? Et de 15 unités ?
- 4) Dériver la fonction C_M .
- 5) Dresser le tableau de signe de C'_M et en déduire les variations de C_M .
- 6) Conclure.

Correction en page suivante.

Correction de l'exercice 4

Données : $C_T(x) = 0,1x^2 + 30x + 40$, $C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} = 0,1x + 30 + \frac{40}{x}$.

1) D'après l'énoncé la production maximale est de 25. De plus on produit au minimum 0 réplique, mais puisqu'on ne peut pas diviser par 0, l'ensemble de définition de C_M est $\mathcal{D} =]0; 25]$.

2) Les coûts fixes correspondent aux charges restantes même lorsqu'on produit **0 réplique** d'objets antiques, donc $C_T(0)$. Or $C_T(0) = 40$ donc les coûts fixes quotidiens valent 40€.

3) On souhaite déterminer le coût unitaire d'une seule réplique lorsqu'on en produit au total 10 (ou 15). Par conséquent on utilise la fonction C_M .

$$C_M(10) = 0,1 \times 10 + 30 + \frac{40}{10} = 1 + 30 + 4 = 35 \text{ €}$$

$$C_M(15) = 0,1 \times 15 + 30 + \frac{40}{15} = 1,5 + 30 + \frac{8}{3} = \frac{205}{6} \approx 34,17 \text{ €}$$

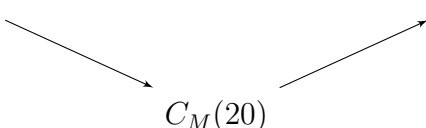
4) On dérive la fonction C_M pour tout $x \in]0; 25]$.

$$C'_M(x) = 0,1 + 0 - \frac{40}{x^2} = \boxed{0,1 - \frac{40}{x^2}}$$

5) Étudions le signe de C'_M .

$$\begin{aligned} C'_M(x) \leq 0 &\iff 0,1 - \frac{40}{x^2} \leq 0 \\ &\iff 0,1 \leq \frac{40}{x^2} \\ &\iff \frac{1}{0,1} \geq \frac{x^2}{40} \quad \text{On inverse donc on change le sens de l'inégalité} \\ &\iff 10 \times 40 \geq \frac{x^2}{40} \times 40 \\ &\iff 400 \geq x^2 \\ &\iff \textcolor{red}{20} \geq \textcolor{red}{x} \quad \text{En prenant la racine carrée} \end{aligned}$$

On en déduit de que C'_M est **négative** lorsque $\textcolor{red}{x} \leq \textcolor{red}{20}$, et donc que C'_M est positive lorsque $x \geq 20$.

x	0	20	$+\infty$
Signe de $C'_M(x)$	—	0	+
Variations de C_M			

6) Conclusion. Le coût unitaire est minimal pour $\boxed{x = 20}$ objets par jour.

De plus $C_M(20) = 0,1 \times 20 + 30 + \frac{40}{20} = 2 + 30 + 2 = \boxed{34}$ ce qui veut dire que le coût unitaire minimal est de 34€.