Chapitre 8 – Correction des exercices

Inéquations produit & inéquations quotient

Exercice 5 :

Soit m la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $m(x) = 2x^2 - x - 3$.

1) Déterminer une racine évidente de m.

On calcule plusieurs images pour $x \in \Big\{1; 2; -1; -2; 3; -3\Big\}$.

- $m(1) = 2 \times 1^2 - 1 - 3 = 2 - 4 = -2$
- $m(2) = 2 \times 2^2 - 2 - 3 = 8 - 5 = 3$
- $m(-1) = 2 \times (-1)^2 - (-1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$ *On s'arrête ici car $m(-1) = 0$*

Ainsi $\mathbf{-1}$ est une racine évidente de m.

2) Factoriser m.

Puisque $\mathbf{-1}$ est une racine évidente de m, $\big(x - (-1)\big) = \boldsymbol{(x + 1)}$ est un facteur de m.

$$\begin{aligned} m(x) &= 2x^2 - x - 3 \\ &= (x+1)(2x-3) \end{aligned}$$

Remarque : (pour comprendre le résultat)

Pour trouver le deuxième facteur $(2x - 3)$ on a cherché à remplacer les « ? » dans l'expression suivante.

$$m(x) = (x - 1)(\ ?\quad ?\ )$$

Puisque le terme en x^2 dans l'expression de m est $2x^2$ alors on doit avoir $x \times 2x$. De la même façon, puisque le nombre dans l'expression de m est -3 on doit avoir $1 \times (-3)$. Donc le deuxième facteur est $(2x{-}3)$.

On peut aussi vérifier notre résultat en développant (double distributivité) :

$$\begin{aligned} m(x) &= (x+1)(2x-3) \\ &= 2x^2 - 3x + 2x - 3 \\ &= 2x^2 - x - 3 \end{aligned}$$

3) À l'aide du tableau de signes de m, résoudre l'inéquation $m(x) < 0$.

On résout les équations suivantes :

- $x + 1 = 0 \iff x = -1$
- $2x - 3 = 0 \iff x = \dfrac{3}{2}$

Et puisque $x + 1$ et $2x - 3$ sont les expressions de fonctions affines **croissantes** ($m > 0$) on a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$x+1$		$-$	0		$+$		
$2x-3$			$-$		0	$+$	
$m(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi on peut résoudre l'inéquation à l'aide du tableau.

$$m(x) < 0 \iff x \in \left] -1; \frac{3}{2} \right[\qquad \text{(case $-$ dans la dernière ligne du tableau)}$$

Exercice 6 :

Soit d la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $d(x) = 4x^2 + 10x - 6$.

1) Déterminer une racine évidente de d.

On calcule plusieurs images pour $x \in \left\{1; 2; -1; -2; 3; -3\right\}$ et on tombe sur :

$$d(-3) = 4 \times (-3)^2 + 10 \times (-3) - 6 = 4 \times 9 - 30 - 6 = 0$$

Ainsi $\mathbf{-3}$ est une racine évidente de d.

2) Factoriser d.

Puisque $\mathbf{-3}$ est une racine évidente de d, $\big(x - (-3)\big) = \boldsymbol{(x+3)}$ est un facteur de d.

$$\begin{aligned} d(x) &= 4x^2 + 10x - 6 \\ &= (x+3)(4x-2) \end{aligned}$$

3) À l'aide du tableau de signes de d, résoudre l'inéquation $d(x) \geqslant 0$.

On résout les équations suivantes :

- $x + 3 = 0 \iff x = -3$
- $4x - 2 = 0 \iff x = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Et puisque $x + 3$ et $4x - 2$ sont les expressions de fonctions affines **croissantes** ($m > 0$) on a le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		-3		$1/2$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0		$+$		
$4x-2$			$-$		0	$+$	
$d(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi on peut résoudre l'inéquation à l'aide du tableau.

$$d(x) \geqslant 0 \iff x \in \Big]-\infty; -3\Big] \bigcup \Big[\frac{1}{2}; +\infty\Big[\qquad \text{(cases + dans la dernière ligne du tableau)}$$

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{8x - 9}{5 - 3x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

Il suffit de résoudre l'équation $5 - 3x = 0$ afin de trouver la **valeur interdite**.

$$\begin{aligned} 5 - 3x = 0 &\iff -3x = -5 \\ &\iff x = \frac{-3}{-5} \\ &\iff x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Par conséquent l'ensemble de définition de f est

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{5}\right\}$$

2) Dresser le tableau de signes de f.

Il reste à résoudre l'équation suivante : $8x - 9 = 0 \iff x = \dfrac{9}{8}$.

$8x - 9$ est l'expression d'une fonction affine **croissante** $(m = 8 > 0)$; et $5 - 3x$ est l'expression d'une fonction affine **décroissante** $(m = -3 < 0)$. On en déduit donc le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$3/5$		$9/8$		$+\infty$
$8x - 9$		$-$		$-$	0	$+$	
$5 - 3x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Remarque : La valeur interdite $3/5$ est représentée à l'aide d'une **double barre** dans la dernière ligne du tableau.

3) En déduire l'ensemble de solution de l'inéquation $f(x) < 0$.

Ainsi on peut résoudre l'inéquation à l'aide du tableau.

$$f(x) < 0 \iff x \in \left]\frac{3}{5}; \frac{9}{8}\right[\qquad \text{(case $-$ dans la dernière ligne du tableau)}$$

Exercice 11 :

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{9 - x}{-2x + 65}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_g$ de la fonction g.

Il suffit de résoudre l'équation $-2x + 65 = 0$ afin de trouver la **valeur interdite**.

$$\begin{aligned} -2x + 65 = 0 &\iff -2x = -65 \\ &\iff x = \frac{-65}{-2} \\ &\iff x = \frac{65}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent l'ensemble de définition de g est

$$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{65}{2} \right\}$$

2) Dresser le tableau de signes de g.

Il reste à résoudre l'équation suivante : $9-x=0 \iff x=9$.

$9-x$ est l'expression d'une fonction affine **décroissante** $(m=-1<0)$; et $-2x+65$ est aussi l'expression d'une fonction affine **décroissante** $(m=-2<0)$. D'où le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		9		$^{65}/_{2}$		$+\infty$
$9-x$		$+$	0		$-$		
$-2x+65$			$+$		0	$-$	
$g(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

Remarque : La valeur interdite 9 est encore représentée à l'aide d'une **double barre** dans la dernière ligne du tableau.

3) En déduire l'ensemble de solution de l'inéquation $g(x) \geqslant 0$.

Ainsi on peut résoudre l'inéquation à l'aide du tableau.

$$g(x) \geqslant 0 \iff x \in \left]-\infty;9\right[\bigcup \left[\frac{65}{2};+\infty\right[\qquad \text{(cases + dans la dernière ligne du tableau)}$$

Remarque : Puisque 9 est une valeur interdite, elle est nécessairement exclue de l'ensemble de solution (crochet ouvert). Par ailleurs, le crochet est bien fermé en $\dfrac{65}{2}$ car l'inéquation permet que $g(x)$ soit égal à 0 $\big(g(x) \geqslant 0\big)$.