Chapitre 6 - Feuille d'exercices

Arithmétique et calcul

Exercice 1 :

Exprimer les nombres suivants sous la forme $\mathbf{2k}$ ou bien $\mathbf{2k+1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ en fonction de leur parité.

a. $28 =$ .... **b.** $7 =$ .... **c.** $135 =$ .... **d.** $-49 =$ .... **e.** $0 =$ ....

f. $-13 =$ .... **g.** $12 =$ .... **h.** $25 =$ .... **i.** $-7 =$ ....

Exercice 2 : Montrer que la somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

Exercice 3 : Montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Exercice 4 : Étudier la parité de la somme d'un nombre impair avec un nombre pair.

Exercice 5 : **Nombres premiers pairs**

1) Déterminer la liste de tous les nombres premiers compris entre 1 et 30.

2) Parmi ces nombres, quels sont ceux qui sont pairs ?

3) Existe-t-il d'autres nombres premiers pairs ? Justifier.

Exercice 6 : ★

Démontrer la proposition suivante : « Un entier est pair si et seulement si son carré est pair ».

Exercice 7 :

1) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Étudier la parité des nombres suivants : $A = 2n + 6, \quad B = 40n + 1$.

2) Montrer que $A + B$ est un multiple de 7.

Exercice 8 : Montrer que le produit de deux multiples de deux est un multiple de quatre.

Exercice 9 : Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de trois.

Exercice 10 : ★★

Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n + 1$ est divisible par 4. Montrer que $n^2 + 3$ est également divisible par 4.

Exercice arithmétique bonus	Soit $n \in \mathbb{Z}$; on pose également $A = (n-3)(n+3)$ et $B = n^2 + 4n + 1$. Montrer que le nombre entier $A + B$ est un nombre pair.

Exercice 11 :

Calculer en détaillant les propriétés des puissances utilisées (indication en gris).

a. 4^3 multiplication répétée

b. 6^3 multiplication répétée

c. 7^0 propriété de la puissance 0

d. 2^{-3} propriété puissance négative

e. 4^{-2} propriété puissance négative

f. $(2x)^3$ puissance d'un produit

Exercice 12 :

Simplifier au maximum l'écriture des expressions suivantes.

a. $x^7 \times x^4$

b. $x^5 \times x^{-2} \times x$

c. $x^{-3} \times x$

d. $\left(\frac{x}{4}\right)^2$

e. $\left(\frac{3x}{2y}\right)^2$

f. $\left(\frac{-1}{2x}\right)^2$

g. $(x^2)^3$

h. $(t^5)^{10}$

i. $(y^2)^{-3}$

Exercice 13 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Écrire l'expression suivante sous la forme x^n avec $n \in \mathbb{Z}$: $\dfrac{x}{\frac{1}{x^2}}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Écrire l'expression suivante sous la forme x^n avec $n \in \mathbb{Z}$: $\dfrac{\frac{1}{x^3}}{x}$.

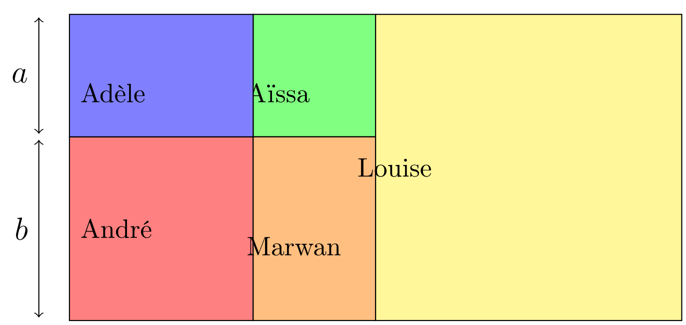
3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Écrire l'expression suivante sous la forme x^n avec $n \in \mathbb{Z}$: $\dfrac{x^{-3} \times x}{\frac{1}{x^5}}$.

4) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Écrire l'expression suivante sous la forme x^n avec $n \in \mathbb{Z}$: $\dfrac{x \times x}{x^2 \times \frac{1}{x^3}}$.

Exercice 14 :

Adèle et Marwan ont un champ rectangulaire tandis que Aïssa, André et Louise ont un champ carré.

Le champ d'André est de côté b, et celui d'Aïssa est de côté a (toutes les longueurs sont mesurées en mètre). Les champs sont disposés comme ci-contre.



1) Quel est le champ le plus grand ? Sa superficie est-elle liée aux superficies des quatre autres champs ?

2) Quelle est la longueur du côté du champ de Louise ?

3) Donner les superficies du champ d'André et du champ d'Aïssa.

4) Relier chaque prénom à la superficie de son champ :

	• b^2
Aïssa •	• $(a+b)^2$
André •	• a^2
Adèle •	• a^2b^2
Marwan •	• a^2+b^2
Louise •	• ab
	• a^2-b^2

5) En utilisant les questions précédentes, montrer que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Exercice 15 :

Simplifier au maximum l'écriture des expressions suivantes.

a. $x^6 \times x^{-2}$

b. $x^{-4} \times x^3 \times x$

c. $x^2 \times x^{-5} \times x^4$

d. $\left(\frac{x}{3}\right)^3$

e. $\left(\frac{-2x}{5y}\right)^2$

f. $\left(\frac{1}{4x}\right)^2$

g. $(x^3)^2$

h. $(a^{-2})^4$

i. $(y^2)^{-3}$

Exercice 16 :

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Écrire les expressions suivantes sous la forme x^n avec $n \in \mathbb{Z}$.

a. $x^4 \times x^{-7} \times (x^2)^3$

b. $\dfrac{x^5}{(x^{-1})^2 \times x}$

c. $\dfrac{(x^3)^2}{\frac{1}{x^4}}$

d. $\left(\dfrac{x}{x^{-2}}\right)^2$

e. $\dfrac{x^{-3} \times x^2}{(x^2)^{-1}}$

f. $\dfrac{x \times x}{x^2 \times \frac{1}{x^3}}$

Exercice 17 :

Développer et réduire les expressions suivantes.

a. $(x+3)^2$

b. $(2x-5)^2$

c. $(x+1)(x-1)$

d. $(3x+2)^2$

e. $(x-4)(x+4)$

f. $(2x-1)(2x+1)$

g. $(x-7)^2$

h. $(x+5)(x-5)$

i. $(4x-2)^2$

Exercice 18 :

Factoriser les expressions suivantes.

a. x^2+6x+9

b. $4x^2-25$

c. x^2-2x+1

d. $9x^2+12x+4$

e. x^2-16

f. $4x^2-4x+1$

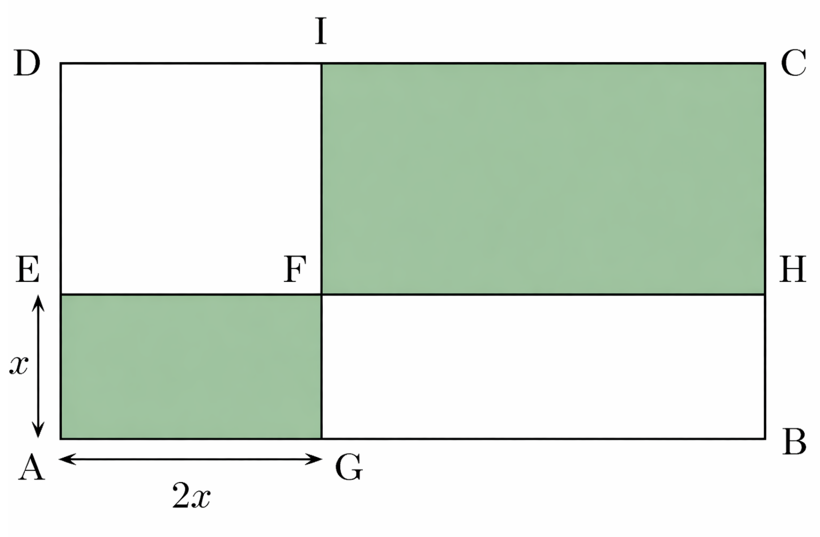
g. $x^2-10x+25$

h. $25x^2-1$

i. $9x^2-6x+1$

Exercice 19 :

$ABCD$ est un rectangle. On connait les longueurs $AD = 4\,\text{cm}$ et $AB = 8\,\text{cm}$. E est un point du segment $[AD]$. On note $AE = x$. Le point G est sur le segment $[AB]$, tel que $AG = 2x$.
On construit les rectangles $AEFG$, $EDIF$, $FICH$ et $GFHB$ comme sur la figure ci-dessous.



1) Calculer l'aire du rectangle $ABCD$.

2) Exprimer l'aire du rectangle $AEFG$ en fonction de x.

3) Exprimer les longueurs CH et IC en fonction de x.

4) Exprimer l'aire du rectangle $FICH$ en fonction de x.

5) Donner l'expression développée et réduite de la somme des aires des rectangles $AEFG$ et $FICH$ (surface coloriée).

6) On veut savoir pour quelles valeurs de x l'aire de la surface coloriée vaut la moitié de celle du rectangle $ABCD$. Montrer que cela revient a résoudre l'équation

$$x^2 - 4x + 8 = 4.$$

7) Developper l'expression $(x-2)^2$.

8) Conclure.

9) On veut maintenant savoir pour quelles valeurs de x l'aire de la surface coloriée vaut les $\dfrac{5}{8}$ de celle du rectangle $ABCD$.
Indication : developper $(x-1)(x-3)$.