

Correction du Travail Encadré – pour le DS n° 6

Arithmétique et calcul

Exercice 1 :

Montrer que la somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

Soit n et n' deux entiers impairs. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $\begin{cases} n = 2k + 1 \\ n' = 2k' + 1 \end{cases}$.

On fait la somme de ces deux nombres impairs :

$$\begin{aligned} n + n' &= 2k + 1 + 2k' + 1 \\ &= 2k + 2k' + 2 \\ &= 2(k + k' + 1) \end{aligned}$$

On pose $K = k + k' + 1$ et ainsi $n + n' = 2K$. Donc $n + n'$ est un nombre pair.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{Z}$, et on considère les nombres $A = 5n + 3$ et $B = 15n + 2$.

Montrer que $A + B$ est un multiple de 5.

$$\begin{aligned} A + B &= 5n + 3 + 15n + 2 \\ &= 5n + 15n + 3 + 2 \\ &= 20n + 5 \\ &= 5 \times (4n + 1) \end{aligned}$$

En posant $K = 4n + 1$ on a bien $A + B = 5K$, et donc $A + B$ est bien un multiple de 5.

Exercice 3 :

1) Calculer les quantités suivantes en détaillant les propriétés des puissances utilisées

a. 3^4

b. 5^{-2}

c. $7^3 \times 7^{-3}$

a. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

b. $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

c. $7^3 \times 7^{-3} = 7^{3-3} = 7^0 = 1$

2) Réduire au maximum l'écriture des expressions suivantes.

a. $x^5 \times x^4$

c. $\left(\frac{x}{2}\right)^3$

e. $(x^3)^2$

b. $x^6 \times x^3 \times x^{-2}$

d. $\left(\frac{5}{-3x}\right)^2$

f. $(x^2)^4$

a. $x^5 \times x^4 = x^{5+4} = x^9$

b. $x^6 \times x^3 \times x^{-2} = x^{6+3-2} = x^7$

c. $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$

d. $\left(\frac{5}{-3x}\right)^2 = \frac{5^2}{(-3x)^2} = \frac{25}{(-3)^2 x^2} = \frac{25}{9x^2}$

e. $(x^3)^2 = x^{3 \times 2} = x^6$

f. $(x^2)^4 = x^{2 \times 4} = x^8$

3) Écrire les expressions suivantes sous la forme x^n avec $n \in \mathbb{Z}$.

a. $\frac{x^2 \times x}{(x^{-1})^2 \times x}$

b. $\frac{(x^3)^2}{x \times \frac{1}{x^5}}$

c. $\frac{x \times x^4 \times \frac{1}{x}}{x^2 \times \frac{1}{x^7}}$

a. $\frac{x^2 \times x}{(x^{-1})^2 \times x} = \frac{x^3}{x^{-2} \times x} = \frac{x^3}{x^{-1}} = \frac{x^3}{\frac{1}{x}} = x^3 \times \frac{x}{1} = x^3 \times x = x^4$

b. $\frac{(x^3)^2}{x \times \frac{1}{x^5}} = \frac{x^{3 \times 2}}{\frac{x}{x^5}} = \frac{x^6}{\frac{1}{x^4}} = x^6 \times \frac{x^4}{1} = x^6 \times x^4 = x^{10}$

c. $\frac{x \times x^4 \times \frac{1}{x}}{x^2 \times \frac{1}{x^7}} = \frac{x^5 \times \frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^7}} = \frac{x^4}{\frac{1}{x^5}} = x^4 \times \frac{x^5}{1} = x^4 \times x^5 = x^9$

Exercice 4 :

1) Développer et réduire les expressions suivantes.

a. $(2x + 4)^2$

b. $(5 - 3x)^2$

c. $(5x + 1)(5x - 1)$

a. $(2x + 4)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 4 + 4^2 = 4x^2 + 16x + 16$

b. $(5 - 3x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$

c. $(5x + 1)(5x - 1) = (5x)^2 - 1^2 = 25x^2 - 1$

2) Factoriser les expressions suivantes.

a. $x^2 + 4x + 4$

c. $4x^2 - 20x + 25$

e. $4 - 80x + 100x^2$

b. $9 - 16x^2$

d. $9x^2 + 6x + 1$

a. $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times 2x + 2^2 = (x + 2)^2$

b. $9 - 16x^2 = 3^2 - (4x)^2 = (3 - 4x)(3 + 4x)$

c. $4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = (2x - 5)^2$

d. $9x^2 + 6x + 1 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2 = (3x + 1)^2$

e. $(x^3)^2 = x^{3 \times 2} = x^6$

f. $4 - 40x + 100x^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times 10x + (10x)^2 = (2 - 10x)^2$