Chapitre 9 : Variable aléatoire réelle

I/ Définition d'une variable aléatoire réelle

Définitions :

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{\omega_1 \ ; \ \omega_2 \ ; \ ... \ ; \ \omega_n\}$. On appelle **variable aléatoire** réelle toute fonction, souvent notée $\boldsymbol{X}$ qui à chaque $\omega_i \in \Omega$ lui associe un nombre réel.

La probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$ est la probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur x_i, elle est notée $\boldsymbol{P(X = x_i)}$.

Exemple : On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Notons $\boldsymbol{P}$ l'issue « obtenir Pile » et $\boldsymbol{F}$ l'issue « obtenir Face ». $\boldsymbol{X}$ est la variable aléatoire qui compte le nombre de « Face » obtenus.

- $\Omega = \Big\{PP \ ; \ FF \ ; \ PF \ ; \ FP\Big\}$
- X qui compte le nombre de « Face » obtenus est à valeur dans $\{0 \ ; \ 1 \ ; \ 2\}$.
- $P(X = 1) = P\Big(\{PF\} \cup \{FP\}\Big) = \dfrac{2}{4} = 0,5$

II/ Loi de probabilité de X

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Définir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité p_i de l'événement $\{X = x_i\}$.

On présente souvent cette loi de probabilité sous la forme d'un tableau.

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_n
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	p_1	p_2	...	p_n

Les probabilités obtenues sont telles que $p_1 + p_2 + \ ... \ + p_n = 1$.

Remarque : On suppose que $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Dans ce cas on a les notations suivantes :

- $P(X \leqslant x_i) = p_1 + p_2 + \ ... \ + p_i$
- $P(X < x_i) = p_1 + p_2 + \ ... \ + p_{i-1}$
- $P(X \geqslant x_i) = p_i + p_{i+1} + \ ... \ + p_n$

III/ Espérance, variance et écart-type

1) Espérance

Définition :

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω dont la loi de probabilité est donnée ci-après.

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	...	x_n
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$	p_1	p_2	...	p_n

L'**espérance** de X est le nombre réel noté $\boldsymbol{E(X)}$ défini par

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ \dots \ + x_n p_n$$

Remarque : L'espérance peut s'interpréter comme la valeur moyenne, pondérée par les probabilités, que prend X sur un grand nombre d'expériences. Il s'agit donc bien d'une valeur que l'on peut **espérer** avoir en répétant de nombreuses fois l'expérience.

Propriété : Soit X une variable aléatoire, et soit $a, b \in \mathbb{R}$. $\quad E(aX + b) = aE(X) + b$

2) Variance et écart-type

Définitions :

✰ La **variance** de X est le nombre réel positif noté $\boldsymbol{V(X)}$ défini par

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i \Big(x_i - E(X)\Big)^2 \\ &= p_1 \Big(x_1 - E(X)\Big)^2 + p_2 \Big(x_2 - E(X)\Big)^2 + \ \dots \ + p_n \Big(x_n - E(X)\Big)^2 \end{aligned}$$

✰ L'**écart-type** de X est le nombre réel positif noté $\boldsymbol{\sigma(X)}$ défini par $\quad \boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

Remarques : La variance et l'écart-type sont tous deux des **indicateurs de dispersion** autour de l'espérance $E(X)$: plus $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont grands, plus les valeurs prises par X sont susceptibles de s'éloigner de l'espérance $E(X)$.

Propriété : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \qquad$ où $\qquad E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$