Fonction exponentielle

l'essentiel·le

Définition / Théorème : Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{f'(x) = f(x)}$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelé **fonction exponentielle**, elle est notée **exp**. En notant $e = \exp(1)$, on a :

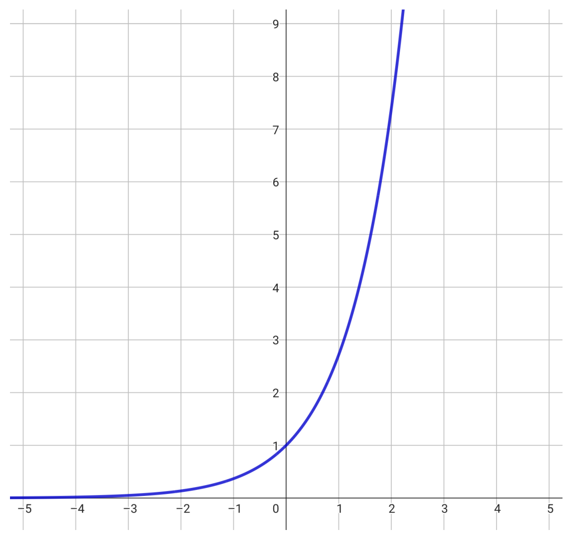
$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\exp(x) = e^x}.$$

Remarque : Le nombre e est appelé nombre d'Euler ou bien constante de Néper, et $\boldsymbol{e \approx 2,718}$.

Ci-contre voici la courbe représentative de la fonction exponentielle f :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x.$$

Remarque : On observe l'une des propriétés de cette fonction. Pour tout réel x, $\boldsymbol{e^x > 0}$.



Propriété : Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a alors :

- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$

Propriété : Pour tous réels x et y on a :

- $e^x = e^y \iff x = y$
- $e^x < e^y \iff x < y$
- $e^x > e^y \iff x > y$

Propriété : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux nombres fixés. Ainsi la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\boldsymbol{f(x) = e^{ax+b}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\boldsymbol{f'(x) = ae^{ax+b}}.$$

Plus généralement : (très utile en terminale)

Si u est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$\boldsymbol{f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}}.$$

Exemple : Pour tout réel x, $f(x) = e^{x^2+3x}$. Ainsi : $\quad f'(x) = (2x+3)e^{x^2+3x}$.