

Chapitre 8 – Correction des exercices

Fonction exponentielle

Exercice 1 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes.

- $\exp(x) = -5$
- $\exp(x) = 1$
- $\exp(x) = 0$
- $\exp(x) < 1$

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$. Par conséquent l'équation $\exp(x) = -5$ n'a pas de solution réelle.
- $e^x = 1 \iff x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$. Par conséquent l'équation $\exp(x) = 0$ n'a pas de solution réelle.
- $e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0 \iff x \in]-\infty; 0[$

Exercice 2 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes.

- $\exp(7x + 8) = \exp(3)$
- $\exp(3x + 1) = \exp(-8x + 2)$
- $\exp(x) = \exp(-x)$

- $e^{7x+8} = e^3 \iff 7x + 8 = 3 \iff 7x = 3 - 8 \iff \frac{7x}{7} = \frac{-5}{7} \iff x = -\frac{5}{7}$
- $e^{3x+1} = e^{-8x+2} \iff 3x + 1 = -8x + 2 \iff 3x + 8x = 2 - 1 \iff x = \frac{1}{11}$
- $e^x = e^{-x} \iff x = -x \iff x + x = -x + x \iff 2x = 0 \iff x = 0$

Exercice 3 :

1) Écrire sous la forme e^a avec $a \in \mathbb{Z}$ le nombre $A = e^{10} \times e^{-3}$.

$$A = e^{10} \times e^{-3} = e^{10-3} = e^7$$

2) Écrire sous la forme e^a avec $a \in \mathbb{Z}$ le nombre $B = \frac{e^7 \times e^2}{e^5}$.

$$B = \frac{e^7 \times e^2}{e^5} = \frac{e^{7+2}}{e^5} = e^9 \times e^{-5} = e^4$$

Exercice 4 :

Développer et simplifier les expressions suivantes.

1) $(1 + e^x)^2$

$$(1 + e^x)^2 = 1^2 + 2e^x + (e^x)^2 = 1 + 2e^x + e^{2x}$$

2) $(e^{-x} + e^x)^2$

$$(e^{-x} + e^x)^2 = (e^{-x})^2 + 2e^{-x}e^x + (e^x)^2 = e^{-2x} + 2e^0 + e^{2x} = e^{-2x} + 2 + e^{2x}$$

3) $(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2$

$$\begin{aligned}(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2 &= (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) \\ &= (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \\ &= e^{2x} - 2 + e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x} \\ &= -4\end{aligned}$$

4) $(e^{2x} + e^{-3x})(e^{4x} + e^{-x})$

$$\begin{aligned}(e^{2x} + e^{-3x})(e^{4x} + e^{-x}) &= e^{2x}e^{4x} + e^{2x}e^{-x} + e^{-3x}e^{4x} + e^{-3x}e^{-x} \\ &= e^{6x} + e^x + e^x + e^{-4x} \\ &= e^{6x} + 2e^x + e^{-4x}\end{aligned}$$

Exercice 5 :

Démontrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a :

1) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x}} = e^{2x} - 1$

Le dénominateur est e^{-x} : multiplier par e^x va faire disparaître les exposants négatifs.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^{-x}} = \frac{e^x \times (e^x - e^{-x})}{e^x \times e^{-x}} = \frac{e^{2x} - e^x e^{-x}}{e^0} = \frac{e^{2x} - 1}{1} = e^{2x} - 1$$

2) $\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Le membre gauche contient e^{-x} au numérateur et au dénominateur : multiplier par e^x va faire disparaître les exposants négatifs.

$$\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x \times (1 - e^{-x})}{e^x \times (1 + e^{-x})} = \frac{e^x - e^x e^{-x}}{e^x + e^x e^{-x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$3) \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{e^{-x}+1}$$

Le membre droit fait apparaître e^{-x} alors que le membre gauche n'en contient pas : multiplier en haut et en bas par e^{-x} va faire apparaître les termes souhaités.

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+e^x} &= \frac{e^{-x} \times e^x}{e^{-x} \times (1+e^x)} \\ &= \frac{e^0}{e^{-x} + e^{-x}e^x} \\ &= \frac{1}{e^{-x} + 1} \end{aligned}$$

Exercice 6 :

1) a. Déterminer les racines (**sans utiliser Δ**) du polynôme $X^2 - 2X + 1$.

$X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, donc l'unique racine est $X = 1$.

b. En posant $X = e^x$, en déduire les solutions de l'équation $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$.

En posant $X = e^x$, l'équation $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$ s'écrit $X^2 - 2X + 1 = 0$, soit $(X - 1)^2 = 0$ d'après la question précédente.

L'unique racine est $X = 1$, donc $e^x = 1 = e^0$, ce qui donne $x = 0$.

2) En utilisant la même méthode qu'en question 1 résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$.

En posant $X = e^x$, l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ s'écrit $X^2 + 2X - 3 = 0$.

On remarque que $X = 1$ est racine évidente : $1 + 2 - 3 = 0$. Donc $(X - 1)$ est un facteur, et par identification : $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$.

Les racines sont $X = 1$ et $X = -3$, donc :

- $X = e^x = 1 = e^0 \implies x = 0$
- $X = e^x = -3$ est impossible car $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'ensemble solution de l'équation $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ est donc $S = \{0\}$.

3) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $e^{2x} + 3e^x + 1 = 0$.

En posant $X = e^x$, l'équation $e^{2x} + 3e^x + 1 = 0$ s'écrit $X^2 + 3X + 1 = 0$. Aucune racine évidente ici, on calcule le discriminant : $\Delta = 9 - 4 = 5$, donc :

$$X_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < 0 \quad X_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0 \quad (\text{car } \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3)$$

Puisque les deux racines sont strictement négatives, il n'existe aucun $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = X_1$ ou $e^x = X_2$. L'ensemble solution de l'équation $e^{2x} + 3e^x + 1 = 0$ est donc $S = \emptyset$.

Exercice 7 :

1) Résoudre \mathbb{R} l'équation suivante : $e^x - 8xe^x = 0$.

On factorise par e^x :

$$e^x - 8xe^x = e^x(1 - 8x) = 0$$

Or $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc l'équation se réduit à $1 - 8x = 0$, soit $x = \frac{1}{8}$. $S = \left\{ \frac{1}{8} \right\}$

2) Résoudre \mathbb{R} l'équation suivante : $5xe^x - e^{x+3} = 0$.

On remarque que $e^{x+3} = e^x \times e^3$, donc on factorise par e^x :

$$5xe^x - e^{x+3} = 5xe^x - e^x \times e^3 = e^x(5x - e^3) = 0$$

Or $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc l'équation se réduit à $5x - e^3 = 0$, soit $x = \frac{e^3}{5}$. $S = \left\{ \frac{e^3}{5} \right\}$

Exercice 8 :

Dériver les fonctions suivantes toutes définies pour $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = e^{8x}$$

$$g(x) = e^{2-3x}$$

$$h(x) = e^{6x+2-x}$$

$$k(x) = xe^{3-x}$$

Rappel : $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$

- $f'(x) = 8e^{8x}$

- $g'(x) = -3e^{2-3x}$

- $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = e^{5x+2}$ ainsi $h'(x) = 5e^{5x+2}$

- La fonction k est sous la forme $u \times v$ donc on utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} k'(x) &= 1 \times e^{3-x} + x \times (-e^{3-x}) \\ &= e^{3-x} - xe^{3-x} && \text{on peut factoriser par } e^{3-x} \\ &= e^{3-x}(1 - x) \end{aligned}$$

Exercice 9 :

Soit f une fonction telle que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x}$.

1) Déterminer une expression de la dérivée f' de la fonction f .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -e^{-x}$$

2) En déduire le tableau de variations de f .

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f'(x) = -e^{-x} < 0$ sur \mathbb{R} .

La dérivée f' est strictement négative sur \mathbb{R} donc f est strictement décroissante sur ce même ensemble.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
f	↘	

Exercice 10 :

Soit g une fonction telle que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = (6x + 7)e^{3x}$.

1) Déterminer une expression de la dérivée g' sous la forme « $(ax + b)e^{3x}$ ».

g est un produit de fonction sous la forme $u \times v$ donc la dérivée est $(uv)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 6 \times e^{3x} + (6x + 7) \times 3e^{3x} \\
 &= 6e^{3x} + (18x + 21)e^{3x} && \text{(on peut factoriser par } e^{3x}\text{)} \\
 &= (6 + 18x + 21)e^{3x} \\
 &= (18x + 27)e^{3x}
 \end{aligned}$$

2) En déduire le tableau de variations de g .

Comme $e^{3x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $g'(x) = (18x + 27)e^{3x}$ est celui de $x \mapsto 18x + 27$.

$18x + 27$ est une fonction affine de coefficient directeur $m = 18 > 0$, donc croissante, elle est donc d'abord négative puis positive. De plus :

$$18x + 27 = 0 \iff x = -\frac{27}{18} = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$18x + 27$	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+
g	↘ $g(-\frac{3}{2})$ ↗		

Exercice 11 :

Soit h une fonction telle que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = (-x^2 - 2x + 11)e^{-2x+1}$.

1) Déterminer une expression de la dérivée h' de la fonction h .

h est un produit de fonctions sous la forme $u \times v$ dont la dérivée est $(uv)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (-2x - 2)e^{-2x+1} + (-x^2 - 2x + 11) \times (-2)e^{-2x+1} \\ &= (-2x - 2)e^{-2x+1} + (2x^2 + 4x - 22)e^{-2x+1} && \text{(on peut factoriser par } e^{-2x+1}\text{)} \\ &= (-2x - 2 + 2x^2 + 4x - 22)e^{-2x+1} \\ &= (2x^2 + 2x - 24)e^{-2x+1} \end{aligned}$$

2) En déduire le tableau de variations de h .

Comme $e^{-2x+1} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $h'(x) = (2x^2 + 2x - 24)e^{-2x+1}$ est celui de $x \mapsto 2x^2 + 2x - 24$.

On calcule le discriminant Δ du polynôme $2x^2 + 2x - 24$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-24) = 4 + 192 = 196 = 14^2 \quad \text{ainsi} \quad \sqrt{\Delta} = 14$$

Puisque $\Delta > 0$, la fonction $x \mapsto 2x^2 + 2x - 24$ a deux racines x_1 et x_2 .

$$x_1 = \frac{-2 - 14}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \quad x_2 = \frac{-2 + 14}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Le coefficient dominant est $a = 2 > 0$ donc la parabole représentative de $x \mapsto 2x^2 + 2x - 24$ est tournée vers le haut. D'où le tableau de signes suivant, et le tableau de variations de h .

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
h			$h(-4)$		$h(3)$		

Exercice 12 :

Soit k une fonction définie par $k(x) = -\frac{e^x}{e^x + 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_k de la fonction k .

k est un quotient, défini tant que le dénominateur est non nul. Or :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0 \quad \implies \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x + 1 > 0$$

Le dénominateur ne s'annule donc jamais, ainsi $\mathcal{D}_k = \mathbb{R}$.

2) Déterminer une expression de la dérivée k' et en déduire les variations de k .

Pour faciliter le calcul de la dérivée, on peut écrire : $k(x) = -\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{-e^x}{e^x + 1}$.

k est un quotient de fonctions sous la forme $\frac{u}{v}$ dont la dérivée est $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} k'(x) &= \frac{-e^x(e^x + 1) - (-e^x) \times e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^{2x} - e^x + e^{2x}}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

Or :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}, \quad -e^x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x + 1)^2 > 0 \end{array} \right\} \implies \forall x \in \mathbb{R}, \quad k'(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 1)^2} < 0$$

Puisque la fonction dérivée k' est strictement négative sur \mathbb{R} , la fonction k est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$k'(x)$	-	
k		