

# Chapitre 7 : Calcul vectoriel

## I/ Orthogonalité

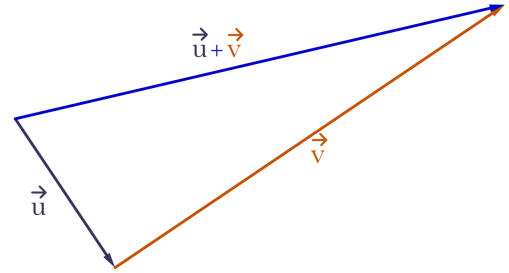
### Définition :

Soit  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$  deux vecteurs non nuls.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **orthogonaux** lorsque  $(AB)$  et  $(CD)$  sont perpendiculaires. On note  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

### Propriété :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. On a alors :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$



### Propriété :

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs. On a alors :  $\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$

## II/ Produit scalaire

Dans cette partie on considèrera deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

### Définition :

On appelle **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et défini par  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

**Remarque :** La dernière propriété du **I** peut donc se réécrire :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Le produit scalaire peut donc s'interpréter comme un **défaut d'orthogonalité**.

### Propriété : Produit scalaire en cas de colinéarité

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, on a alors deux cas :

- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dans le même sens alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  ;
- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraires alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ .

**Propriété :** Produit scalaire dans le cas général

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left( \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

**Propriété :** Cas particulier du produit scalaire

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

**Propriété :** Propriétés algébriques du produit scalaire

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  trois vecteurs et  $k$  un réel.

- Le produit scalaire est **symétrique**.

$$\star \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

- Le produit scalaire est **bilinéaire**.

$$\star \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\star \vec{u} \cdot (k \times \vec{v}) = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$$

### III/ Projection orthogonale

#### Rappels de seconde

Soit  $A$  un point et  $d$  une droite.

**Définition :** Le **projeté orthogonal** de  $A$  sur la droite  $d$  est le point  $M$ , intersection de  $d$  et de la perpendiculaire à  $d$  passant par  $A$ .

**Propriété :** Pour tout  $B \in d$ ,  $AB \geq AM$ .

**Définition :**  $\text{dist}(A; d) = AM$

**Propriété :**

Soit  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  deux vecteurs et  $M$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ . Dans ce cas :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AM}$$

**Propriété :** Cas particulier du produit scalaire

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan. On note  $\alpha$  la mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$ . On a alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\alpha)$$

## IV/ Théorème d'AL-KASHI

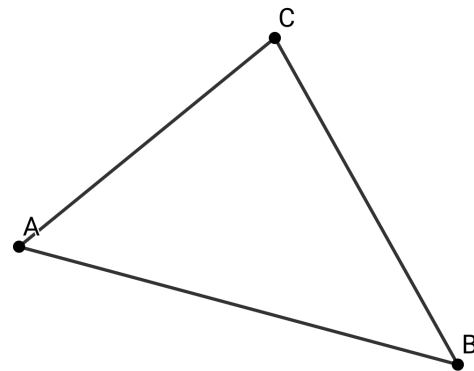
### Théorème :

Soit  $ABC$  un triangle. On a les trois égalités suivantes :

$$\star AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$$

$$\star AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\star CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \times \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$



### Remarques :

- On utilise souvent la formule équivalente :  $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times CA \times CB \times \cos(\widehat{BAC})$ .
- Lorsque le triangle est rectangle, on retrouve le théorème de PYTHAGORE. Le théorème d'AL-KASHI est donc une généralisation du théorème de PYTHAGORE.