Chapitre 7 – Exercices

Calcul vectoriel

Exercice 1 :

Dans une base orthonormée on considère $A\big(-2;\frac{4}{3}\big)$, $B\big(2;2\big)$ ainsi que $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1/2\\4\end{pmatrix}$.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 2 :

Soit $k \in \mathbb{R}$. Dans une base orthonormée du plan, on considère les vecteurs suivants.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}3/2\\-4\end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3/4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w}\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}$$

1) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

2) Déterminer la valeur de k pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient orthogonaux.

3) Pour la valeur de k trouvée précédemment, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 3 :

Dans une base orthonormée on considère les points $A\big(-2;1\big)$, $B\big(1;-1\big)$ et $C\big(5;5\big)$. Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, préciser le sommet en lequel ABC est rectangle.

Exercice 4 :

$ABCD$ est un carré de côté 6. Les point I et J sont les milieux respectifs des côtés $\big[BC\big]$ et $\big[CD\big]$. L'objectif de cet exercice est de calculer de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.

Partie 1

1) Représenter la situation à l'aide d'un schéma.

2) On considère le repère d'origine A tel que B et D ont pour coordonnées $B\big(6;0\big)$ et $D\big(0;6\big)$.

- **a.** Déterminer les coordonnées des points A, C, I et J.
- **b.** En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ puis calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.

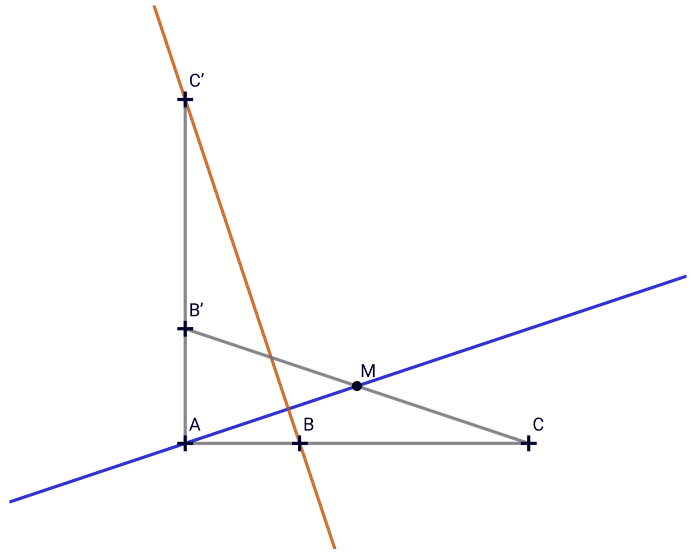
Partie 2

3) Monter les égalités vectorielles suivantes.

- **a.** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$
- **b.** $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ}$

4) En utilisant les questions précédentes, calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$.

Exercice 5 :



ABB' et ACC' sont deux triangles rectangles isocèles en A.

On a $AB = AB' = 1$ et $AC = AC' = 3$. De plus le point M est le milieu de $\left[B'C\right]$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB'}\right)$.

Monter que $\left(AM\right) \perp \left(BC'\right)$.

Exercice 6 :

$ABCD$ est un carré de côté a. I est le point tel que $\overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. J est le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

1) Représenter la situation à l'aide d'un schéma.

2) **a.** Montrer que $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{BJ} = -\dfrac{3}{4}\overrightarrow{CB}$.

3) **a.** Calculer $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI}$.

b. Que peut-on en déduire pour les droites $\left(AJ\right)$ et $\left(DI\right)$?

Exercice 7 :

$ABCD$ est un rectangle. I est le milieu de $\left[CD\right]$. On pose $AB = a$ et $AD = b$. Montrer l'équivalence :

$$\boldsymbol{\left(AC\right) \perp \left(BC'\right) \iff a = b\sqrt{2}}$$

Exercice 8 :

ABC est un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $BC = 6$.

1) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2) En déduire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Exercice 9 :

On considère le triangle ZAD tel que $ZD = 6$ et $AD = 4$. I est le milieu de $\big[ZD\big]$ et H et le projeté orthogonal de A sur $\big(ZD\big)$. On sait de plus que $H \in \big[ID\big]$ et $HI = 1$.

1) Représenter la situation à l'aide d'un schéma.

2) Calculer $\overrightarrow{DZ} \cdot \overrightarrow{DA}$.

3) En déduire la valeur de la mesure de l'angle $\widehat{ADZ}$ en radian.

Exercice 10 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé on considère les points $N\big(4\,;2\big)$, $P\big(-4\,;-3\big)$ et $A\big(-1\,;3\big)$ qui forment le triangle NPA.

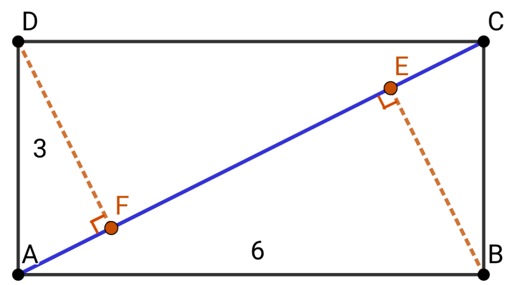
1) Calculer les longueurs PN et PA.

2) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PN} \cdot \overrightarrow{PA}$.

3) Déterminer la valeur exacte de la mesure de l'angle $\widehat{NPA}$.

Exercice 11 :

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 6$ et $AD = 3$. Les points E et F sont les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur $\big(AC\big)$.

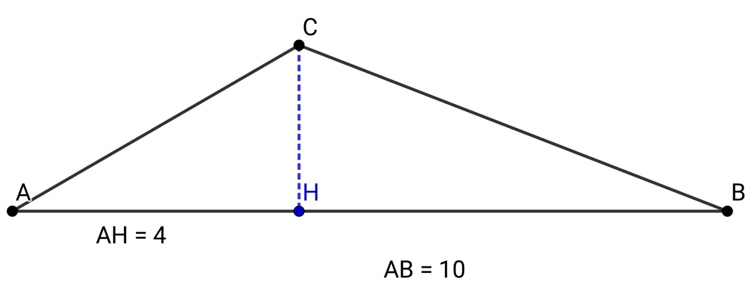


1) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

2) En déduire la longueur FE.

Exercice 12 :

ABC est un triangle tel que $AB = 10$. On note H le projeté orthogonal de C sur $\big(AB\big)$, et on sait que $AH = 4$. De plus la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est de $\dfrac{\pi}{6}$ radians.



1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire la longueur AC.

3) À l'aide de la formule d'Al-Kashi, montrer que $BC = \dfrac{2\sqrt{93}}{3}$.