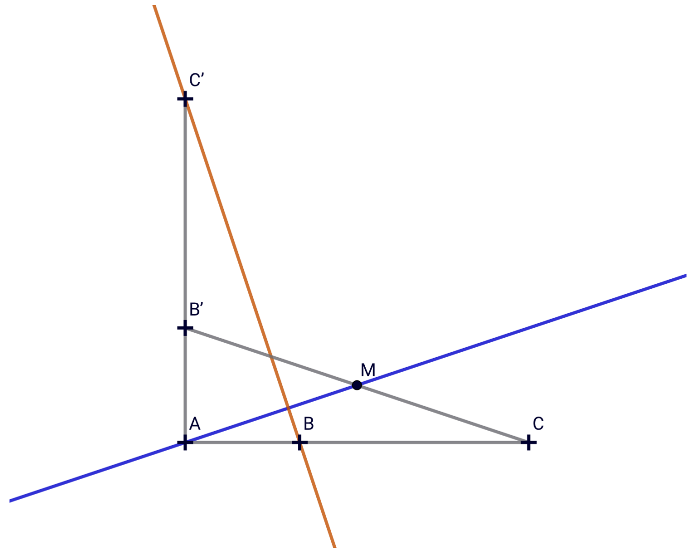
Exercice 5 :

ABB' et ACC' sont deux triangles rectangles isocèles en A.

On a $AB = AB' = 1$ et $AC = AC' = 3$. De plus le point M est le milieu de $[B'C]$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB'}\right)$.

Monter que $(AM) \perp (BC')$.



Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AB'}\right)$ on peut déterminer les coordonnées des points suivants :

$$A(0;0) \qquad B(1;0) \qquad C(3;0) \qquad B'(0;1) \qquad C'(0;3)$$

De plus on peut déterminer les coordonnées de M milieu de $[B'C]$:

$$M\left(\frac{x_{B'}+x_C}{2}; \frac{y_{B'}+y_C}{2}\right) = M\left(\frac{0+3}{2}; \frac{1+0}{2}\right) = M\left(3/2; 1/2\right)$$

On peut alors ensuite déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC'}$ puis calculer leur produit scalaire.

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC'}\begin{pmatrix} x_{C'} - x_B \\ y_{C'} - y_B \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC'}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

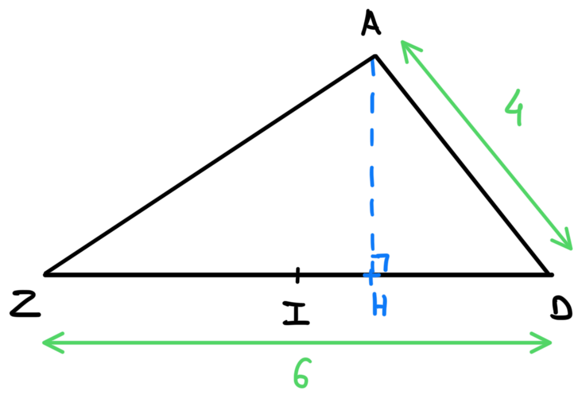
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC'} = \frac{3}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times 3 = 0$$

Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BC'}$ sont orthogonaux, et donc les droites (AM) et (BC') sont parallèles.

Exercice 9 :

On considère le triangle ZAD tel que $ZD = 6$ et $AD = 4$. I est le milieu de $\left[ZD\right]$ et H et le projeté orthogonal de A sur $\left(ZD\right)$. On sait de plus que $H \in \left[ID\right]$ et $HI = 1$.

1) Représenter la situation à l'aide d'un schéma.



2) Calculer $\overrightarrow{DZ} \cdot \overrightarrow{DA}$.

D'après la formule du produit scalaire à l'aide du projeté orthogonal on a

$$\overrightarrow{DZ} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DZ} \cdot \overrightarrow{DH}$$

Or les vecteurs $\overrightarrow{DZ}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont colinéaires et de même sens ainsi :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DZ} \cdot \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{DZ} \cdot \overrightarrow{DH} \\
&= \left\|\overrightarrow{DZ}\right\| \times \left\|\overrightarrow{DH}\right\| \\
&= DZ \times DH \\
&= 6 \times 2 & \quad DH = 2 \text{ car } ID = 3 \text{ et } HI = 1 \\
&= 12
\end{aligned}$$

3) En déduire la valeur de la mesure de l'angle $\widehat{ADZ}$ en radian.

On a d'une part $\overrightarrow{DZ} \cdot \overrightarrow{DA} = 12$ et d'une autre part :

$$\overrightarrow{DZ} \cdot \overrightarrow{DA} = DZ \times DA \times \cos\left(\widehat{ADZ}\right)$$

Ainsi on peut isoler $\cos\left(\widehat{ADZ}\right)$:

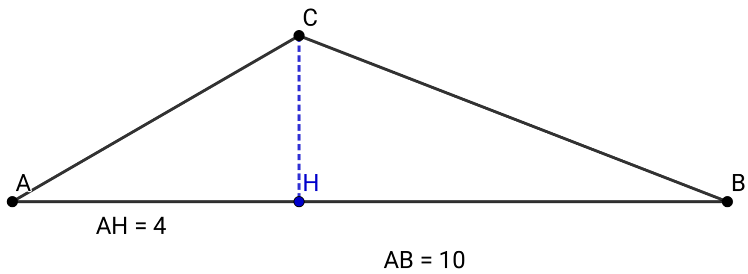
$$\begin{aligned}
\cos\left(\widehat{ADZ}\right) &= \frac{\overrightarrow{DZ} \cdot \overrightarrow{DA}}{DZ \times DA} \\
&= \frac{12}{6 \times 4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On reconnaît une valeur remarquable d'un cosinus, et donc :

$$\widehat{ADZ} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Exercice 12 :

ABC est un triangle tel que $AB = 10$. On note H le projeté orthogonal de C sur (AB), et on sait que $AH = 4$. De plus la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ est de $\dfrac{\pi}{6}$ radians.



1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

On utilise la formule du produit scalaire faisant intervenir le projeté orthogonal de C sur AB.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \\ &= AB \times AH \qquad \text{car } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont colinéaires et de même sens} \\ &= 10 \times 4 = 40\end{aligned}$$

2) En déduire la longueur AC.

D'après la formule du produit scalaire faisant intervenir le cosinus de $\widehat{BAC}$ on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

Par conséquent on peut isoler AC :

$$\begin{aligned}AC &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times cos\left({}^{\pi}/_{6}\right)} \\ &= \frac{40}{10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

3) À l'aide de la formule d'Al-Kashi, montrer que $BC = \dfrac{2\sqrt{93}}{3}$.

D'après la formule d'Al-Kashi on a :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 10^2 - 2 \times 40 \\ &= \frac{64 \times 3}{3^2} + 100 - 80 \\ &= \frac{64}{3} + \frac{20 \times 3}{3} \\ &= \frac{124}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad BC &= \sqrt{\frac{124}{3}} = \frac{\sqrt{124}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{124} \times \sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{372}}{3} = \frac{\sqrt{4 \times 93}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{93}}{3} = \frac{2\sqrt{93}}{3} \end{aligned}$$

Rappels : • $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ • $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ • $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$