

## Chapitre 6 – Correction des exercices

### Dérivation

#### Exercice 10 :

Dans cet exercice, on cherche à étudier le comportement global d'une fonction rationnelle à l'aide de sa dérivée. Les résultats obtenus en première partie pourront être utilisés dans la deuxième partie.

#### Première partie : Étude d'un polynôme

Soit  $P$  la fonction polynomiale du second degré définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $P(x) = 3x^2 - 48x - 396$ .

1) Dire si la fonction  $P$  admet un minimum ou bien un maximum.

Le coefficient dominant de  $P$  est  $a = 3 > 0$  donc la parabole est tournée vers le haut : la fonction  $P$  admet un **minimum**.

2) a. La fonction  $P$  s'annule-t-elle ? Si oui donner ses racines.

On calcule le discriminant :  $\Delta = (-48)^2 - 4 \times 3 \times (-396) = 2304 + 4752 = 7056$ .

Comme  $\Delta = 7056 > 0$ , la fonction  $P$  admet deux racines  $x_1$  et  $x_2$  :

$$x_1 = \frac{48 - \sqrt{7056}}{2 \times 3} = \frac{48 - 84}{6} = \frac{-36}{6} = -6 \quad x_2 = \frac{48 + \sqrt{7056}}{2 \times 3} = \frac{48 + 84}{6} = \frac{132}{6} = 22$$

b. Donner la forme factorisée de  $P$ .

On utilise les racines trouvées précédemment :

$$P(x) = 3(x + 6)(x - 22)$$

**Rappel :** Le forme factorisée de  $P$  est  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  où  $a$  est le coefficient dominant.

3) Dresser le tableau de signes de  $P$ .

La parabole est tournée vers le haut ( $a = 3 > 0$ ) et les racines sont  $x_1 = -6$  et  $x_2 = 22$ , donc  $P$  est négative entre les racines et positive à l'extérieur :

$x$	$-\infty$	$-6$	$22$	$+\infty$	
$P(x)$	+	0	-	0	+

## Deuxième partie : Étude d'une fonction rationnelle

En mathématique, on appelle fraction rationnelle une fraction algébrique dont le dénominateur et le numérateur sont des polynômes. On considère la fonction  $f$  définie par la fraction rationnelle suivante.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 50x - 4}{x - 8}$$

4) Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $f$ .

La fonction  $f$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  sauf lorsque le dénominateur s'annule, c'est-à-dire pour  $x = 8$ . Donc :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{8\}$$

5) Montrer que :  $\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{P(x)}{(x-8)^2}$

On dérive  $f$  en utilisant la formule  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$  avec  $u(x) = 3x^2 + 50x - 4$  et  $v(x) = x - 8$ . On a alors  $u'(x) = 6x + 50$  et  $v'(x) = 1$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(6x + 50)(x - 8) - (3x^2 + 50x - 4) \times 1}{(x - 8)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 48x + 50x - 400 - 3x^2 - 50x + 4}{(x - 8)^2} \\ &= \frac{3x^2 - 48x - 396}{(x - 8)^2} \\ &= \frac{P(x)}{(x - 8)^2} \end{aligned}$$

6) a. Dresser le tableau de signes de  $f'$ .

On étudie le signe de  $f'(x) = \frac{P(x)}{(x-8)^2}$ .

Le dénominateur  $(x - 8)^2$  est **toujours positif** sur  $\mathcal{D}_f$ , donc le signe de  $f'$  est le même que celui de  $P(x) = 3(x + 6)(x - 22)$ , dont on connaît le tableau de signes (partie 1). On ajoute simplement la valeur interdite  $x = 8$  à l'aide d'une **double barre** :

$x$	$-\infty$	$-6$	$8$	$22$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$

b. En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$ .

On déduit le tableau de variations de  $f$  à partir du signe de  $f'$  :

$x$	$-\infty$	$-6$	$8$	$22$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f$		$f(-6)$		$f(22)$		

7) a. Déterminer les extremums locaux de  $f$ .

On calcule les valeurs de  $f$  en  $x = -6$  et  $x = 22$  :

$$f(-6) = \frac{3 \times (-6)^2 + 50 \times (-6) - 4}{-6 - 8} = \frac{108 - 300 - 4}{-14} = \frac{-196}{-14} = 14$$

$$f(22) = \frac{3 \times 22^2 + 50 \times 22 - 4}{22 - 8} = \frac{1452 + 1100 - 4}{14} = \frac{2548}{14} = 182$$

$f$  admet 14 comme **maximum local** en  $x = -6$  et admet 182 comme **minimum local** en  $x = 22$ .

b. En déduire si l'équation  $f(x) = 100$  admet une solution.

On peut compléter le tableau de variations avec les valeurs calculées précédemment :

$x$	$-\infty$	$-6$	$8$	$22$	$+\infty$
$f$		14		182	

Sur la branche de droite (pour  $x > 8$ ),  $f$  admet un minimum local de 182. Ainsi :

$$\forall x \in ]8; +\infty[, \quad f(x) \geq 182 > 100$$

Sur la branche de gauche (pour  $x < 8$ ),  $f$  admet un maximum local de 14. Ainsi :

$$\forall x \in ]-\infty; 8[, \quad f(x) \leq 14 < 100$$

Dans les deux cas,  $f(x) = 100$  est impossible : l'équation  $f(x) = 100$  **n'admet aucune solution**.

## Exercice 11 :

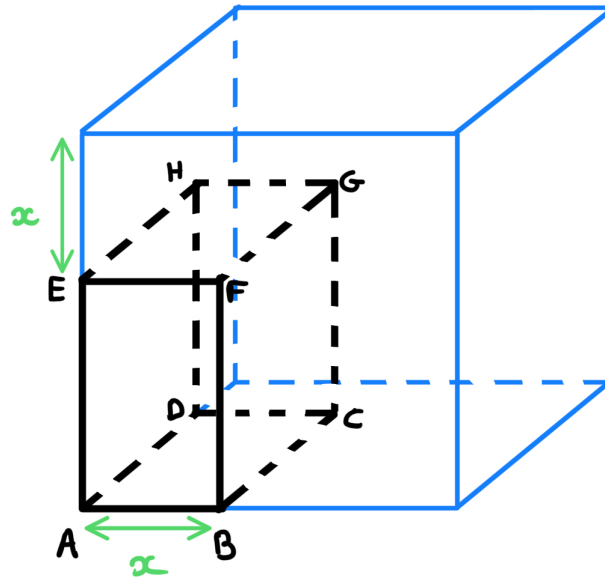
Dans un cube de volume  $216 \text{ cm}^3$  (représenté ci-contre en **bleu**), on place dans le coin inférieur gauche un pavé droit ABCDEFGH.

De plus :

- le quadrilatère EHDA est un carré ;
- $AB = x \text{ cm}$  ;
- l'espace entre ce pavé droit et la face du haut du cube est également de  $x \text{ cm}$ .

La situation est représentée par le schéma ci-contre. *Le schéma n'est pas à l'échelle.*

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position du point  $B$  pour laquelle le volume de ABCDEFGH est maximal.



- 1) Justifier que le cube **bleu** a pour côté 6 cm.

Dans un cube tous les côtés sont de même longueur  $c$ . Or le volume du cube est de  $c^3 = 216 \text{ cm}^3$  par conséquent  $c = \sqrt[3]{216} = 6 \text{ cm}$ .

- 2) Quel est le volume du pavé droit ABCDEFGH lorsque  $x = 1,5 \text{ cm}$  ?

Notons  $V$  le volume du pavé droit ABCDEFGH. Ainsi  $V = AB \times AE \times AD$ . Il nous faut alors déterminer ces trois longueurs.

- $AB = x$  et puisque  $x = 1,5$  on a  $AB = 1,5$
- Puisque la hauteur du cube est de 6 cm (Q°1) on en déduit la longueur  $AE = 6 - 1,5 = 4,5$
- Enfin puisque EHDA est un carré,  $AD = AE = 4,5$

On peut alors calculer le volume  $V$ .

$$V = 1,5 \times 4,5 \times 4,5 = 30,375 \text{ cm}^3$$

- 3) On note  $V$  la fonction qui à  $x$  associe le volume de la boîte. Donner l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_V$  de la fonction  $V$ .

Puisque  $x$  est une distance, nécessairement  $x \geq 0$ . De plus, la longueur  $x$  ne peut dépasser la longueur du côté du cube, donc  $x \leq 6$ . Ainsi  $\mathcal{D}_V = [0; 6]$ .

4) Démontrer que pour tout  $x \in \mathcal{D}_V$ ,  $V(x) = 36x - 12x^2 + x^3$ .

On procède avec la même méthodologie qu'en question 2, ainsi on a aussi  $V(x) = AB \times AE \times AD$ . Il nous faut alors déterminer ces trois longueurs en fonction de  $x$ .

- $AB = x$
- Puisque la hauteur du cube est de 6 cm ( $Q^{\circ}1$ ) on en déduit la longueur  $AE = 6 - x$
- Enfin puisque EHDA est un carré,  $AD = AE = 6 - x$

On peut alors calculer le volume  $V(x)$  en fonction de  $x$ .

$$\begin{aligned} V(x) &= x \times (6 - x) \times (6 - x) && \text{attention aux parenthèses} \\ &= x(6 - x)^2 \\ &= x(36 - 2 \times 6x + x^2) \\ &= x(36 - 12x + x^2) \\ &= 36x - 12x^2 + x^3 \end{aligned}$$

5) Étudier les variations de  $V$ , puis répondre au problème posé.

Afin d'étudier les variations de  $V$ , il faut déterminer la dérivée  $V'$  et étudier son signe.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 36 - 12 \times 2x + 3x^2 \\ &= 36 - 24x + 3x^2 \end{aligned}$$

$V'$  est un polynôme du second degré, on peut étudier son signe en déterminant ses racines puis son tableau de signes.

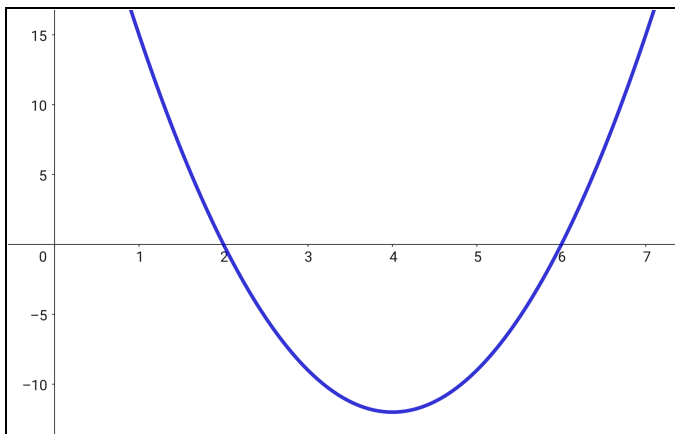
$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-24)^2 - 4 \times 3 \times 36 \\ &= 144 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{24 - \sqrt{144}}{2 \times 3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{24 + \sqrt{144}}{2 \times 3} \\ &= 6 \end{aligned}$$

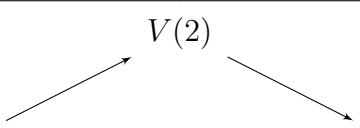
$\Delta > 0$  ainsi  $V'$  a deux racines  $x_1$  et  $x_2$ .

Le coefficient dominant de  $V'$  est  $a = 3 > 0$  donc la parabole est tournée vers le haut. Ainsi on peut tracer un schéma de la parabole représentative de la fonction  $x \mapsto 36 - 24x + 3x^2$ .



*Vous devez faire ce schéma à la main, ici je l'ai fait grâce à Geogebra, que vous n'avez pas le jour du bac...*

On peut ainsi en déduire le tableau de signe de  $V'$  et le tableau de variations de  $V$  sur son ensemble de définition  $\mathcal{D}_V = [0; 6]$ .

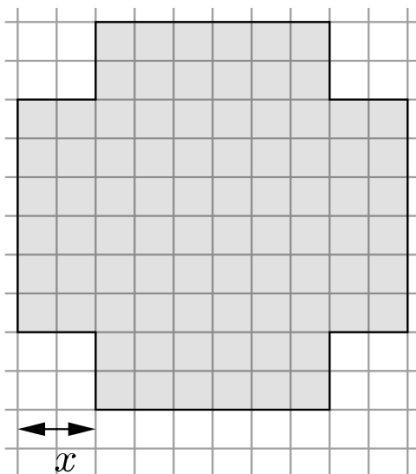
$x$	0	2	6
$V'$	+	0	-
$V$	$V(2)$ 		

**Conclusion :** Par conséquent le volume maximal du pavé droit ABCDEFGH est atteint pour  $x = 2$ , ainsi le point  $B$  doit être placé à 2 cm du point  $A$ .

Par ailleurs ce volume maximal vaut  $V(2) = 36 \times 2 - 12 \times 2^2 + 2^3 = 32 \text{ cm}^3$ .

## Exercice 12 :

On dispose d'un carré de métal de 10 cm de côté. Afin de fabriquer une boîte sans couvercle, on retire à chaque coin un carré de côté  $x \text{ cm}$  et on relève les bords par pliage. La boîte obtenue est donc un pavé droit.



Le but de cet exercice est de déterminer les dimensions de la boîte pour lesquelles le volume de celle-ci sera maximal.

1) Calculer le volume de la boîte lorsque  $x = 2$ .

Puisque le carré de métal initial fait 10 cm de côté, la longueur de la boîte fait  $10 - 2 \times 2 = 6 \text{ cm}$ . Comme le socle de la boîte est un carré, la largeur fait également 6 cm. Enfin la hauteur fait 2 cm. Finalement on peut calculer le volume  $V$  de la boîte.

$$V = 6 \times 6 \times 2 = 36 \times 2 = 72 \text{ cm}^3$$

- 2) On note  $V$  la fonction qui à  $x$  associe le volume de la boîte. Donner l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_V$  de la fonction  $V$ .

Puisque  $x$  est une distance, nécessairement  $x \geq 0$ . De plus, puisque le côté du carré de métal initial est fait 10 cm de côté, on ne peut retrancher de chaque côté plus de 5 cm donc nécessairement  $x \leq 5$ . Ainsi  $\mathcal{D}_V = [0; 5]$ .

- 3) Démontrer que pour tout  $x \in \mathcal{D}_V$   $V(x) = 100x - 40x^2 + 4x^3$ .

Il nous faut alors déterminer les trois longueurs du pavé droit que forme la boîte en fonction de  $x$ .

- La longueur et la largeur sont égales et valent toutes les deux  $10 - x - x = 10 - 2x$ .
- La hauteur de la boîte vaut exactement  $x$ .

On peut alors calculer le volume  $V(x)$  en fonction de  $x$ .

$$\begin{aligned} V(x) &= x \times (10 - 2x)^2 \\ &= x \times (10^2 - 2 \times 10 \times 2x + (2x)^2) \\ &= x(100 - 40x + 4x^2) \\ &= 100x - 40x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

- 4) Étudier les variations de  $V$ , puis réaliser un schéma de la boîte indiquant les dimensions qui permettent d'avoir un volume maximal.

Afin d'étudier les variations de  $V$ , il faut déterminer la dérivée  $V'$  et étudier son signe.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 100 - 40 \times 2x + 4 \times 3x^2 \\ &= 100 - 80x + 12x^2 \end{aligned}$$

$V'$  est un polynôme du second degré, on peut étudier son signe en déterminant ses racines puis son tableau de signes.

$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-80)^2 - 4 \times 12 \times 100 \\ &= 1600 \end{aligned}$		$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{80 - \sqrt{1600}}{2 \times 12} \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$	$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{80 + \sqrt{1600}}{2 \times 12} \\ &= 5 \end{aligned}$
$\Delta > 0$ ainsi $V'$ a deux racines $x_1$ et $x_2$ .			

Le coefficient dominant de  $V'$  est  $a = 12 > 0$  donc la parabole est tournée vers le haut. Ainsi on peut en déduire le tableau de signes de  $V'$ .

*Si besoin, pour mieux comprendre le tableau de signes suivant, vous pouvez tracer un schéma de la parabole représentative de la fonction  $x \mapsto 100 - 80x + 12x^2$ .*

$x$	0	$\frac{5}{3}$	5
$V'$	+	0	-
$V$	$V\left(\frac{5}{3}\right)$		

**Conclusion :** Par conséquent le volume maximal de la boîte en métal est atteint pour  $x = \frac{5}{3} \approx 1,67$  cm.

*Le schéma de la boîte demandé dans cette question est laissé en exercice.*