Devoir surveillé n° 4 – Correction

Dérivation

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie par : $\quad f(x) = \dfrac{7x - 3x^2}{2x + 3}$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf lorsque le dénominateur s'annule.

$$\begin{aligned} 2x + 3 = 0 &\iff 2x = -3 \\ &\iff x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{3}{2} \right\}$.

2) Déterminer l'expression de la fonction dérivée f'.

On reconnaît une fonction de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

$$u(x) = 7x - 3x^2 \quad \text{et} \quad v(x) = 2x + 3$$

On a alors :

$$u'(x) = 7 - 6x \quad \text{et} \quad v'(x) = 2$$

D'après la formule de dérivation d'un quotient :

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(7 - 6x)(2x + 3) - (7x - 3x^2) \times 2}{(2x + 3)^2} \\ &= \frac{(-12x^2 - 4x + 21) - (14x - 6x^2)}{(2x + 3)^2} \\ &= \frac{-6x^2 - 18x + 21}{(2x + 3)^2} \end{aligned}$$

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

Calculons $f(1)$:

$$f(1) = \frac{7\times 1 - 3\times 1^2}{2\times 1+3} = \frac{7-3}{5} = \frac{4}{5}$$

Calculons $f'(1)$:

$$f'(1) = \frac{-6\times 1^2 - 18\times 1 + 21}{(2\times 1+3)^2} = \frac{-6-18+21}{25} = \frac{-3}{25}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y &= -\frac{3}{25}(x-1) + \frac{4}{5} \\ &= -\frac{3}{25}x + \frac{3}{25} + \frac{4}{5} \\ &= -\frac{3}{25}x + \frac{3}{25} + \frac{20}{25} \\ &= -\frac{3}{25}x + \frac{23}{25} \end{aligned}$$

Donc l'équation réduite de la tangente est :

$$y = -\frac{3}{25}x + \frac{23}{25}$$

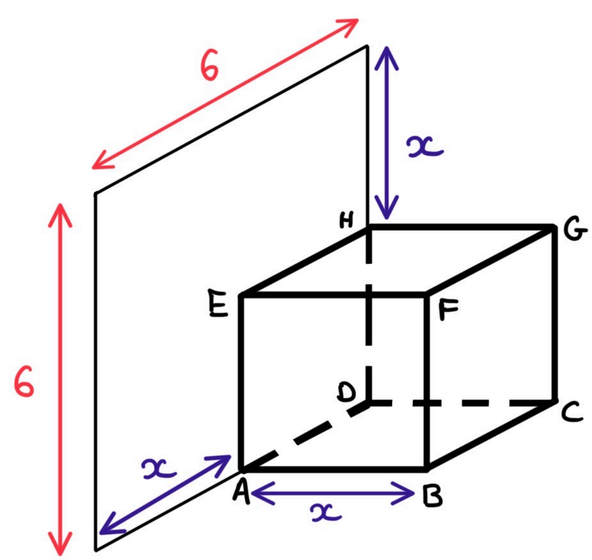
Exercice 2 :

Dans cet exercice, toutes les mesures de longueurs sont exprimées en mètre.

Un pavé droit $ABCDEFGH$ est placé le long d'un mur carré de côté 6. On a de plus les informations suivantes.

- Le pavé est placé contre le bord arrière du mur.
- $AB = x$
- La distance entre l'avant du pavé et le bord avant du mur est x.
- La distance entre le haut du pavé et le bord haut du mur est x.

La situation est représentée par le schéma ci-contre, qui n'est **pas à l'échelle**.



L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de x pour laquelle le volume du pavé est maximal.

1) Déterminer le volume du pavé droit $ABCDEFGH$ lorsque $x = 2$.

Notons V le volume du pavé droit $ABCDEFGH$. Ainsi $V = AB \times AE \times AD$. Il nous faut alors déterminer ces trois longueurs.

- $AB = x$ et puisque $x = 2$ on a $AB = 2$
- $AD = AE = 6 - 2 = 4$

On peut alors calculer le volume V.

$$V = 2 \times 4 \times 4 = 32 \text{ m}^3$$

2) On note V la fonction qui a x associe le volume du pavé droit $ABCDEFGH$.

a. Justifier que l'ensemble de définiton de V est $\mathcal{D}_V = \left]0; 6\right[$.

Puisque x est une distance, nécessairement $x > 0$. De plus, la longueur x ne peut dépasser la longueur du côté du mur carré, donc $x < 6$. Ainsi $\mathcal{D}_V = \left]0; 6\right[$.

b. Montrer que : $\forall x \in \mathcal{D}_V, \quad V(x) = 36x - 12x^2 + x^3$

On procède avec la même méthodologie qu'en question 1, ainsi on a encore $V(x) = AB \times AE \times AD$. Il nous faut alors déterminer ces trois longueurs en fonction de x.

- $AB = x$
- $AD = AE = 6 - x$

On peut alors calculer le volume $V(x)$ en fonction de x.

$$\begin{aligned} V(x) &= x \times (6 - x) \times (6 - x) \qquad \textit{attention aux parenthèses} \\ &= x(6 - x)^2 \\ &= x\left(36 - 2 \times 6x + x^2\right) \\ &= x\left(36 - 12x + x^2\right) \\ &= 36x - 12x^2 + x^3 \end{aligned}$$

3) **a.** Donner une expression de la fonction dérivée V'.

$$\begin{aligned} V'(x) &= 36 - 12 \times 2x + 3x^2 \\ &= 36 - 24x + 3x^2 \end{aligned}$$

b. Étudier les variations de V puis conclure.

Afin d'étudier les variations de V il faut étudier le signe de V' qui est une fonction polynôme du second degré, dont on peut étudier son signe en déterminant ses racines puis son tableau de signes.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-24)^2 - 4 \times 3 \times 36 \\ &= 144\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ ainsi V' a deux racines x_1 et x_2.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{24-\sqrt{144}}{2\times 3} \\ &= 2\end{aligned} \qquad \begin{aligned}x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{24+\sqrt{144}}{2\times 3} \\ &= 6\end{aligned}$$

Le coefficient dominant de V' est $a = 3 > 0$ donc la parabole est tournée vers le haut. Ainsi on peut en déduire son tableau de signes, puis les variations de V sur $\mathcal{D}_V = \left]0;6\right[$.

x	0		2		6
V'		$+$	0	$-$	
V		$\nearrow$	$V(2)$	$\searrow$	

Conclusion : Par conséquent le volume maximal du pavé droit $ABCDEFGH$ est atteint pour $x = 2$ mètres.