Chapitre 5 : Suites arithmétiques et géométriques

I/ Suites arithmétiques

1) Premières généralités

Définition :

Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite **arithmétique** lorsqu'il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ appelé **raison** tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

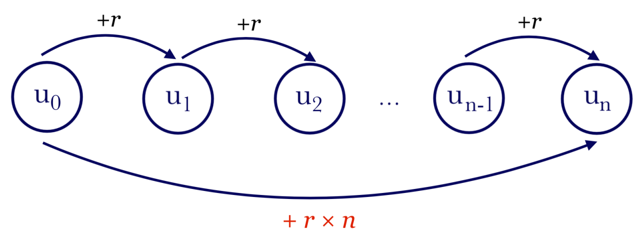
relation de récurrence

Remarque : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = u_n + r \iff u_{n+1} - u_n = r$

Propriété : Forme explicite d'une suite arithmétique

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$.

terme général



2) Somme des termes d'une suite arithmétique

Propriété : Cas particulier de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n = n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+...+(n-1)+n$$

Propriété : Cas général

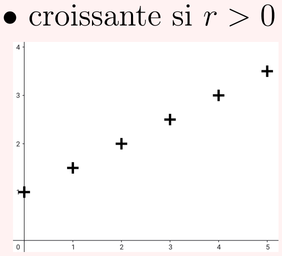
La somme S des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.

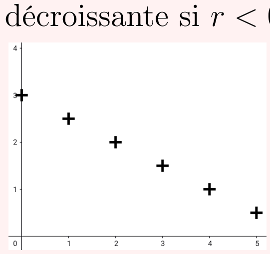
Plus généralement on pourra retenir $S = (nombre\ de\ termes) \times \frac{(premier\ terme)+(dernier\ terme)}{2}$.

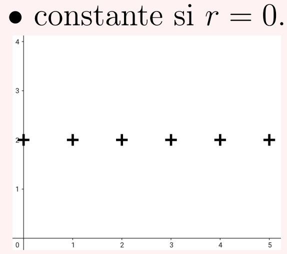
3) Sens de variation

Propriété : Une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}$ est :

- croissante si $r > 0$;
- décroissante si $r < 0$;
- constante si $r = 0$.







II/ Suites géométriques

1) Premières généralités

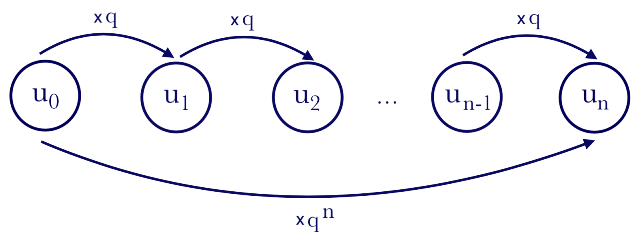
Définition :

Une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est dite **géométrique** lorsqu'il existe un nombre $q \in \mathbb{R}$ appelé **raison** tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$.
relation de récurrence

Remarque : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{R}, \qquad u_{n+1} = u_n \times q \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$

Propriété : Forme explicite d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$.
terme général



2) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : Cas particulier de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n$

Soit q un réel tel que $q \neq 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \ \dots\ + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Propriété : Cas général

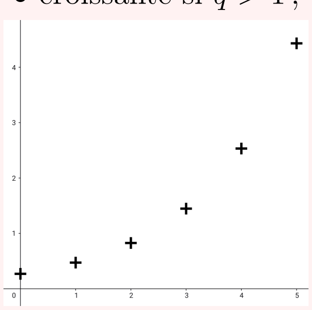
La somme S des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Plus généralement on pourra retenir $S = (premier\ terme) \times \frac{1-q^{(nombre\ de\ termes)}}{1-q}$.

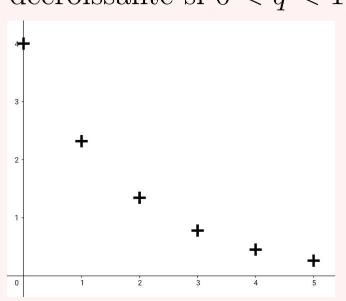
3) Sens de variation

Propriété : Soit q un réel strictement positif $(q \in \mathbb{R}_+^*)$. Une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ est :

- croissante si $q > 1$;



- décroissante si $0 < q < 1$;



- constante si $q = 1$.