Chapitre 5 – Correction des exercices sur les suites arithmético-géométriques

Exercice : Forêt incendiée

Après un incendie dévastateur, une forêt commence à se reconstituer. La surface couverte par la végétation suit une progression qui dépend du temps. On modélise cette évolution par une suite (u_n) où $\boldsymbol{u_n}$ représente le pourcentage de la surface forestière régénérée après $\boldsymbol{n}$ **années** (ainsi $n \in \mathbb{N}$).

Données sur la suite : $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 0,8u_n + 15$.

1) Quelle était la surface forestière restante immédiatement après l'incendie, exprimée en pourcentage ?

Puisque $u_0 = 1$, la surface forestière restante immédiatement après l'incendie est de 1%.

2) Quel pourcentage de la surface forestière était régénérée après 1 an ? Et après 2 ans ?

On cherche à calculer u_1 et u_2. On utilise la relation de récurrence de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,8u_0 + 15 \\ &= 0,8 \times 1 + 15 \\ &= 15,8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= 0,8u_1 + 15 \\ &= 0,8 \times 15,8 + 15 \\ &= 27,64 \end{aligned}$$

Après 1 an il y avait 15,8% de surface forestière régénérée, et après 2 ans 27,64%.

3) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{v}_n = u_n - 75$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

On sait que $\mathrm{v}_n = u_n - 75$ et on veut montrer qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{v}_{n+1} = q \times \mathrm{v}_n$.

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_{n+1} &= u_{n+1} - 75 \\ &= 0,8u_n + 15 - 75 \\ &= 0,8u_n - 60 \\ &= 0,8\left(u_n - \frac{60}{0,8}\right) \\ &= 0,8\big(u_n - 75\big) \\ &= 0,8\mathrm{v}_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est de nature géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = u_0 - 75 = -74$.

b. Donner le terme général de (v_n) en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\begin{aligned} \mathrm{v}_n &= \mathrm{v}_0 \times q^n \\ &= -74 \times 0,8^n \end{aligned}$

c. En déduire une expression du terme général de la suite (u_n) en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathrm{v}_n = u_n - 75 \implies \begin{aligned} u_n &= 75 + \mathrm{v}_n \\ &= 75 - 74 \times 0,8^n \end{aligned}$

4) **a.** Quel sera le pourcentage de la surface forestière régénérée après 20 ans ? Et après 30 ans ? *Arrondir les résultats au dixième.*

On cherche à calculer u_{20} et u_{30}. On utilise le terme général de la suite (u_n) trouvé en question **3)c.** :

$$\begin{aligned} u_{20} &= 75 - 74 \times 0,8^{20} \\ &\approx 74,1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_{30} &= 75 - 75 \times 0,8^{30} \\ &\approx 74,9 \end{aligned}$$

Après 20 ans, 74,1% de la surface forestière sera régénérée, et après 30 ans ce sera 74,9%.

b. Émettre une conjecture (*hypothèse*) sur la capacité maximale de régénération de cette forêt après l'incendie. *Expliquez d'où provient cette conjecture.*

Plus n devient grand, plus la valeur de u_n semble s'approcher de 75. Autrement dit, on peut conjecturer que la capacité maximale de régénération de cette forêt sera de 75% de sa surface.

Remarque : En terminale vous pourrez démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 75$.

Exercice : Croissance d'un champignon

Une petite quantité de *Pleurotus ostreatus* est placée dans une boîte de Petri contenant un substrat nutritif. Ce champignon se développe en formant du **mycelium** : un réseau de filaments qui constitue la partie principale du champignon, avant l'apparition du chapeau.

Chaque jour on mesure la masse de mycelium en développement afin d'étudier son évolution. Cette croissance est modélisée par une suite $\boldsymbol{(u_n)}$, où $\boldsymbol{u_n}$ représente la masse en milligrammes (mg) du champignon au bout de $\boldsymbol{n}$ **jours**.

Culture de *Pleurotus ostreatus*

Données sur la suite :
$\boldsymbol{u_0 = 52}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} = 0,95u_n + 63}$.

1) Quelle est la masse de mycelium déposée dans la boîte de Petri au lancement de l'expérience ?

Puisque $u_0 = 52$, on en déduit que la masse de mycelium déposée dans la boîte de Petri au lancement de l'expérience est de 52 mg.

2) Déterminer la masse de mycelium présente au bout d'un jour, puis au bout de deux jours.

On cherche à calculer u_1 et u_2. On utilise la relation de récurrence de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,95u_0 + 63 \\ &= 0,95 \times 52 + 63 \\ &= 112,4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= 0,95u_1 + 63 \\ &= 0,95 \times 112,4 + 63 \\ &= 170,78 \end{aligned}$$

Au bout d'un jour, il y a $112,4$ mg de mycelium dans la boîte. Au bout de deux jours, il y en a $170,78$ mg.

3) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{v}_n = u_n - 1\,260$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

On sait que $\mathrm{v}_n = u_n - 1\,260$ et on veut montrer qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{v}_{n+1} = q \times \mathrm{v}_n$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,260 \\
&= 0,95u_n + 63 - 1\,260 \\
&= 0,95u_n - 1\,197 \\
&= 0,95\left(u_n - \frac{1\,197}{0,95}\right) \\
&= 0,95\big(u_n - 1\,260\big) \\
&= 0,95\mathrm{v}_n
\end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est de nature géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme
$\mathrm{v}_0 = u_0 - 1\,260 = -1\,208$.

b. Donner le terme général de (v_n) en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\begin{aligned}\mathrm{v}_n &= \mathrm{v}_0 \times q^n \\ &= -1\,208 \times 0,95^n\end{aligned}$

c. En déduire une expression du terme général de la suite (u_n) en fonction de n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathrm{v}_n = u_n - 1\,260 \implies \begin{aligned}u_n &= 1\,260 + \mathrm{v}_n \\ &= 1\,260 - 1\,208 \times 0,95^n\end{aligned}$

4) **a.** Quelle sera la masse de mycelium dans la boîte après 15 jours d'expérience ? Et après 110 jours ? Et après 125 jours ? *Arrondir les résultats au milligramme près.*

On cherche à calculer u_{15}, u_{110} et u_{125}. On utilise le terme général de la suite (u_n) trouvé précedemment :

$$\begin{aligned}u_{15} &= 1\,260 - 1\,208 \times 0,95^{15} \\ &\approx 700\end{aligned} \qquad \begin{aligned}u_{110} &= 1\,260 - 1\,208 \times 0,95^{110} \\ &\approx 1\,256\end{aligned} \qquad \begin{aligned}u_{125} &= 1\,260 - 1\,208 \times 0,95^{125} \\ &\approx 1\,258\end{aligned}$$

b. D'après vos résultats, la masse de mycelium atteindra-t-elle les 2 grammes ?
Rappel : 2g = 2000 mg.

Plus n devient grand, plus la valeur de u_n semble s'approcher de $1\,260$. Autrement dit, on peut conjecturer que la masse de mycelium ne dépassera pas les $1\,260$ mg, et donc elle n'atteindra pas les 2 grammes.

Exercice : Suite quelconque

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1) Calculer les trois premiers termes de la suite.

$$u_0 = 8$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,85 \times u_0 + 1,8 \\ &= 0,85 \times 8 + 1,8 \\ &= 8,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= 0,85 \times u_1 + 1,8 \\ &= 0,85 \times 8,6 + 1,8 \\ &= 9,11 \end{aligned}$$

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathrm{v}_n = u_n - 12$. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

On sait que $\mathrm{v}_n = u_n - 12$ et on veut montrer qu'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{v}_{n+1} = q \times \mathrm{v}_n$.

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_{n+1} &= u_{n+1} - 12 \\ &= 0,85u_n + 1,8 - 12 \\ &= 0,85u_n - 10,2 \\ &= 0,85\left(u_n - \frac{10,2}{0,85}\right) \\ &= 0,85\left(u_n - 12\right) \\ &= 0,85\mathrm{v}_n \end{aligned}$$

Ainsi la suite (v_n) est de nature géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $\mathrm{v}_0 = u_0 - 12 = -4$.

3) Exprimer v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\begin{aligned} \mathrm{v}_n &= \mathrm{v}_0 \times q^n \\ &= -4 \times 0,85^n \end{aligned}$

4) En déduire le terme général de la suite (u_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathrm{v}_n = u_n - 12 \implies \begin{aligned} u_n &= 12 + \mathrm{v}_n \\ &= 12 - 4 \times 0,85^n \end{aligned}$

5) Émettre une conjecture sur la limite de la suite (u_n).

Conjecture : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 12$.