Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 3 – Correction

Automatismes & probabilités

Automatismes   *3 points*

Question 1 :

L'inverse du triple de 2 est égal à :

a. -6 **b.** $\dfrac{3}{2}$ **c.** $\dfrac{1}{6}$ **d.** $\dfrac{2}{3}$

> **c** Le triple de 2 est $\mathbf{3 \times 2 = 6}$. L'inverse du triple de 2 est donc $\mathbf{\dfrac{1}{6}}$.
>
> **Remarque :** inverse $\neq$ opposé. (ex : « inverse de 2 »$= \dfrac{1}{2}$; « opposé de 2 » $= -2$)

Question 2 :

On considère $x, y, u \in \mathbb{R}^*$ tels que $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{u}$

a. $u = \dfrac{x+y}{x+1}$ **b.** $u = \dfrac{xy}{x^2+y}$ **c.** $u = \dfrac{xy}{y+x^2y}$ **d.** $u = \dfrac{xy}{x+xy}$

> **b** $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{u}} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{xy} + \dfrac{x^2}{xy} = \dfrac{y+x^2}{xy} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{u} = \dfrac{xy}{y+x^2} = \dfrac{xy}{x^2+y}$

Question 3 :

Le prix d'un produit est noté P. Ce prix augmente de 15% puis baisse de 20%. A l'issue de ces deux variations successives, le nouveau prix est noté P_1. On peut affirmer que :

a. $P_1 = P$ **b.** $P_1 > P$ **c.** $P_1 < P$ **d.** Cela dépend de P

> **c** Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 15% est de $1,15$. Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 20% est de $0,8$ (puisque $1 - 0,2 = 0,8$). Ainsi $P_1 = 1,15 \times 0,8 \times P$. Il suffit de savoir si $1,15 \times 0,8$ est un nombre plus grand ou plus petit que 1.
>
> $$1,15 \times 0,8 = \frac{115}{100} \times \frac{8}{10} = \frac{(100+15)\times 8}{1000} = \frac{800+120}{1000} = \frac{920}{1000} = 0,92 \boldsymbol{<} \mathbf{1}$$
>
> Ainsi $P_1 = 0,92P < P$.

Exercice : **Virus au sein d'une population** 12 *points*

Dans un pays, il y a 3% de la population contaminée par un virus. On dispose d'un test de dépistage pour ce virus qui a les propriétés suivantes :

- la probabilité qu'une personne choisie au hasard ait un test positif est de $0,0685$;
- parmi les personnes non contaminées, 96% ont un test négatif.

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et on note T l'événement « le test est positif ».

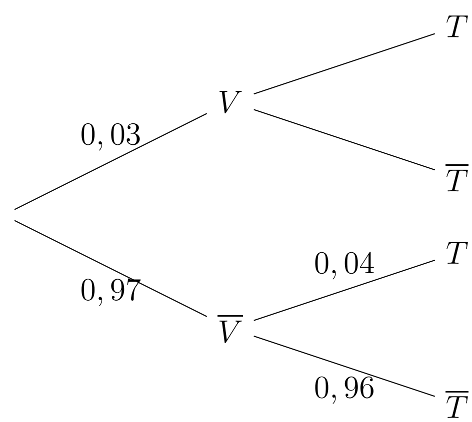
1) D'après les données de l'énoncé, donner les probabilités $P(V)$, $P(T)$ et $P_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right)$.

D'après l'énoncé, on a :

$$P(V) = 0,03 \qquad P(T) = 0,0685 \quad \text{et} \quad P_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0,96.$$

2) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
Toutes les pondérations connues devront être placées et indiquées.

On représente la situation par un arbre de probabilités en distinguant d'abord si la personne choisie est contaminée ou non.



3) Calculer la probabilité $P\left(\overline{V} \cap T\right)$. Que cela signifie-t-il dans le contexte de l'exercice ?

On a :

$$P\left(\overline{V} \cap T\right) = P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(T) = 0,97 \times 0,04 = 0,0388.$$

Cela signifie que la probabilité que le test d'une personne non contaminée soit positif est de $0,0388$ (3,88% de chances).

4) Calculer la probabilité que la personne choisie au hasard ne soit pas contaminée sachant qu'elle a été testée positive.
Le résultat sera arrondi à 10^{-4} près.

On cherche à calculer la probabilité $P_T\left(\overline{V}\right)$. On a :

$$P_T\left(\overline{V}\right) = \frac{P\left(T \cap \overline{V}\right)}{P(T)}.$$

Or : $P\left(T \cap \overline{V}\right) = P\left(\overline{V} \cap T\right) = 0,0388$. Donc :

$$P_T\left(\overline{V}\right) = \frac{0,0388}{0,0685} \approx 0,5664$$

Ainsi, la probabilité que la personne ne soit pas contaminée sachant qu'elle a été testée positive est d'environ 0,5664 (56,64% de chances).

5) **a.** Calculer la probabilité $P(V \cap T)$.

Les événements V et $\overline{V}$ forment une **partition de l'univers**. On peut donc appliquer la formule des **probabilités totales** pour l'événement T :

$$P(T) = P(V \cap T) + P\left(\overline{V} \cap T\right).$$

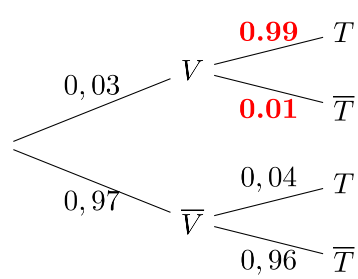
On en déduit donc :

$$\begin{aligned} P(V \cap T) &= P(T) - P\left(\overline{V} \cap T\right) \\ &= 0,0685 - 0,0388 \\ &= 0,0297 \end{aligned}$$

b. En déduire $P_V(T)$ puis compléter dans une autre couleur votre arbre de probabilité.

$$\begin{aligned} P(V \cap T) = P(V) \times P_V(T) \quad &\Longrightarrow \quad 0,0297 = 0,03 \times P_V(T) \\ &\Longrightarrow \quad P_V(T) = \frac{0,0297}{0,03} = \mathbf{0,99} \end{aligned}$$

On complète alors ainsi l'arbre de probabilités.



c. Que pouvez-vous en conclure quant à l'efficacité du test ?

Lorsqu'une personne est contaminée, le test détecte la maladie dans 99% des cas, ce qui est très élevé. De plus lorsqu'une personne est saine, le test confirme cet état dans 96% des cas. On peut en conclure que le test est efficace.

6) Bonus $(+0,5\ pts)$ Donner une explication à la probabilité élevée obtenue en question **4)**.

En question **4)**, on a vu que 56,64% des personnes qui ont testées positivement à la maladie ne sont pas malades.

Bien que le test soit efficace, la maladie est peu présente dans la population. Ainsi la majorité des personnes testées ne sont pas malades. Ainsi lorsqu'on teste toute la population, même un taux faible de faux positifs appliqué à un très grand nombre de personnes non malades conduit à un nombre important de résultats positifs erronés, d'où la probabilité élevée de 0,5664.