Chapitre 3 – Exercices

Généralités sur les suites

Exercice 1 :

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -n^2 + 4$.

Exercice 2 :

Dans chaque cas, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

a. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b. $u_n = \dfrac{3^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. $u_n = n^2 - 3n + 12$ pour $n \in \mathbb{N}$.

d. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 :

Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer leur sens de variation.

a. $u_0 = 4$, $u_{n+1} = u_n + \sqrt{2}$ **b.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{v}_n = -3 + 6n^2$. **c.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{w}_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exercice 4 :

On considère la suite (F_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$, que l'on appelle la **suite de Fibonacci**.

1) Calculer les 8 premiers termes de la suite (F_n).

2) Soit f la fonction polynomiale de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x - 1$.

a. Rappeler la formule du discriminant Δ, et déterminer les deux racines de f.

On notera φ la racine positive, et φ' la racine négative.

b. Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \varphi'^n\right)$. Avec la calculatrice, donner la valeur des 8 premiers termes. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

3) Dans cette question, on propose d'expliquer partiellement le résultat observé en question **2)b**.

a. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_n + u_{n-1} = u_{n+1}$.

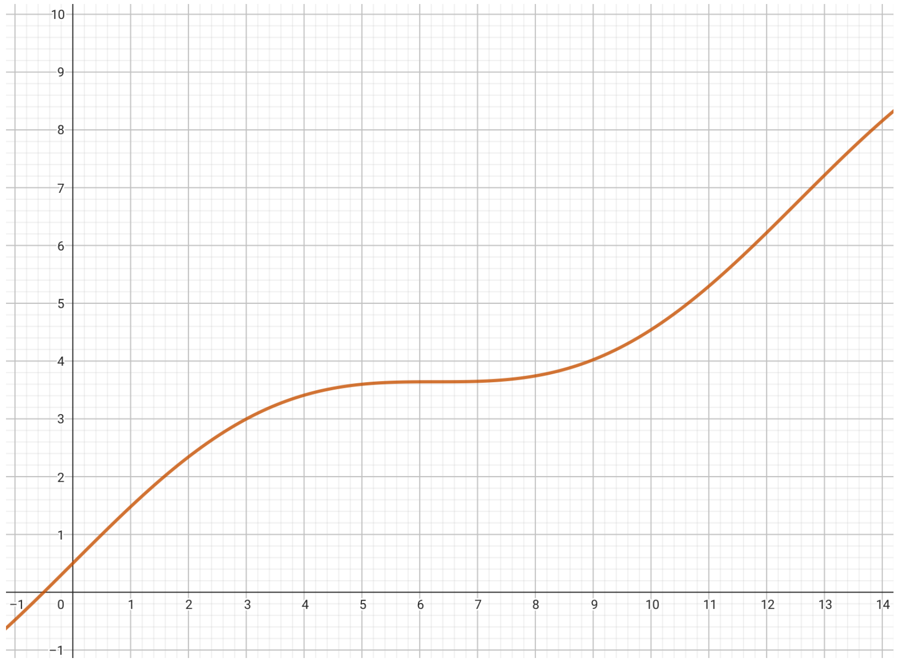
b. Conclure.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \frac{x}{2} + \sin(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2}$.

Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 = 13$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \sin(\frac{u_n}{2}) + \frac{1}{2}$$



1) À l'aide de la courbe de f représentée ci-contre, et de la droite d'équation $y = x$, représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de (u_n).

2) En déduire une conjecture sur la limite de la suite (u_n).