Correction du TE – pour le DS n° 2

Trigonométrie | Généralités sur les suites

Exercice 1 :

Placer sur le cercle trigonométrique ci-contre les points associés aux réels suivants.

a. $\frac{\pi}{4}$

b. $\frac{2\pi}{3}$

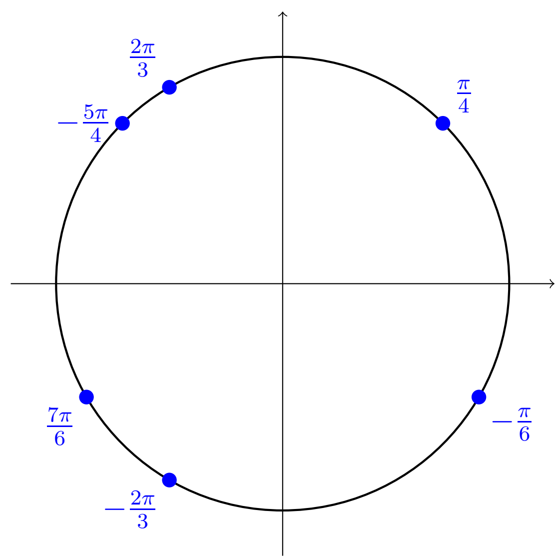
c. $-\frac{\pi}{6}$

d. $\frac{7\pi}{6}$

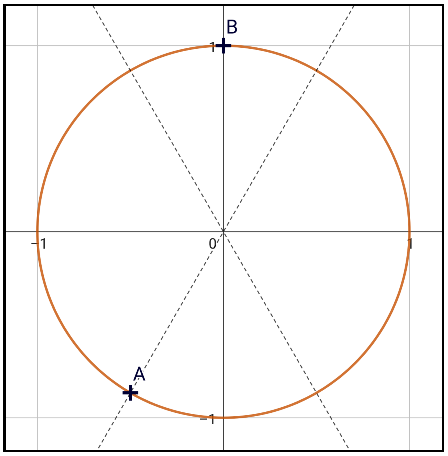
e. $\frac{-5\pi}{4}$

f. $-\frac{2\pi}{3}$

Correction de l'exercice 1



Exercice 2 :



1) Déterminer un réel auquel est associé le point A appartenant à l'intervalle :

a. $\left[0; 2\pi\right[$

b. $\left]-\pi; \pi\right]$

c. $\left[\pi; 3\pi\right[$

2) Reprendre la question **1)** avec le point B.

Correction de l'exercice 2

*Cette correction est volontairement **TRÈS** détaillée, il ne vous sera pas demandé d'écrire autant. Elle a pour seul objectif de vous aider à mieux comprendre la démarche.*

1) Le point A est placé à l'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique. Deux réels représentent le même point s'ils ne diffèrent que d'un multiple de 2π.

a. Intervalle $\left[0; 2\pi\right[$. L'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ est compris entre 0 et 2π, on peut donc choisir directement $\dfrac{4\pi}{3}$.

b. Intervalle $\left]-\pi; \pi\right]$. Pour ramener l'angle dans cet intervalle, on enlève un tour complet 2π :

$$\frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}.$$

On vérifie que $-\pi < -\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \pi$, donc $-\dfrac{2\pi}{3}$ appartient bien à l'intervalle et représente le point A.

c. Intervalle $\left[\pi; 3\pi\right[$. On vérifie que $\pi \leqslant \dfrac{4\pi}{3} < 3\pi$, donc $\dfrac{4\pi}{3}$ appartient déjà à cet intervalle. On peut donc encore choisir $\dfrac{4\pi}{3}$.

2) Le point B est placé à l'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Comme précédemment, on cherche pour chaque intervalle un réel égal à $\dfrac{\pi}{2}$ plus ou moins 2π et appartenant à l'intervalle.

a. Intervalle $\left[0; 2\pi\right[$. L'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est compris entre 0 et 2π, on peut donc choisir $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Intervalle $\left]-\pi; \pi\right]$. L'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est aussi compris entre $-\pi$ et π, on garde donc $\dfrac{\pi}{2}$.

c. Intervalle $\left[\pi; 3\pi\right[$. L'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est trop petit, on ajoute un tour complet 2π :

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}.$$

On vérifie que $\pi \leqslant \dfrac{5\pi}{2} < 3\pi$, donc $\dfrac{5\pi}{2}$ appartient bien à l'intervalle et représente le point B.

Exercice 3 :

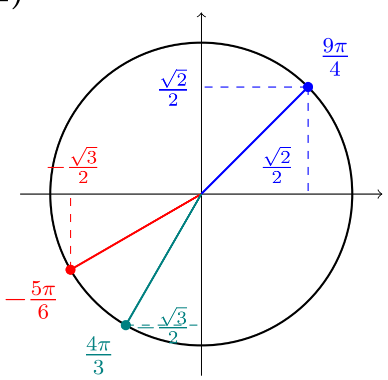
1) Déterminer par lecture sur le cercle trigonométrique chacune des valeurs suivantes.

a. $\cos(\frac{9\pi}{4})$ **b.** $\sin(\frac{9\pi}{4})$ **c.** $\cos(\frac{-5\pi}{6})$ **d.** $\sin(\frac{4\pi}{3})$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 3

1)



a. $\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

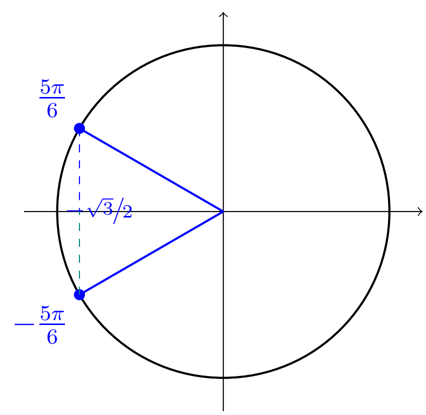
c. $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)

On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'ensemble des solutions est

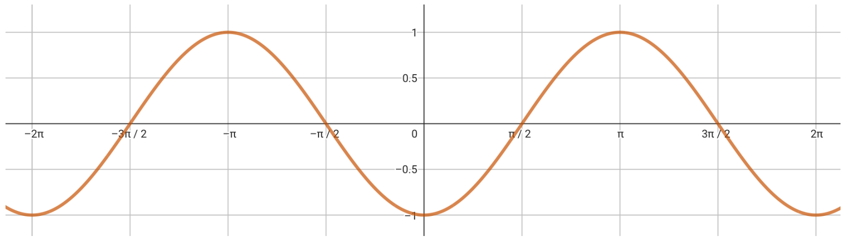
$$S = \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \; ; \; -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$



Exercice 4 :

1) Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \cos(4x+1)$ définie sur $\mathbb{R}$ est $\frac{\pi}{2}$-périodique.

2) On a représenté ci-dessous la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(x-\pi)$.



a. À partir d'une propriété de la courbe représentative de g, émettre une conjecture sur la parité de g.

b. Démontrer cette conjecture.

Correction de l'exercice 4

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, évaluons $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1\right) = \cos(4x+2\pi+1) = \cos(4x+1) = f(x)$$

Car la fonction cosinus est 2π-périodique. Ainsi, f est bien $\dfrac{\pi}{2}$-périodique.

2) **a.** La courbe représentative de g est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; on conjecture donc que g est paire.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = \cos(x-\pi)$. On calcule alors $g(-x) = \cos(-x-\pi) = \cos(-(x+\pi))$. Comme la fonction cosinus est paire, on a $\cos(-(x+\pi)) = \cos(x+\pi)$. De plus, la fonction cosinus est 2π-périodique, donc $\cos(x+\pi) = \cos\big(x+\pi-2\pi\big) = \cos(x-\pi)$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \cos(x-\pi) = g(x)$. Ainsi, la fonction g est paire.

Exercice 5 :

1) Pour chacune des deux suites (u_n) et (w_n) définies ci-dessous sur $\mathbb{N}$, dire s'il s'agit d'une génération récurrente ou d'une génération explicite.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = -5n+2 \qquad\Bigg|\qquad \begin{cases} \mathrm{w}_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{w}_{n+1} = -2\mathrm{w}_n + 5 \end{cases}$$

2) Pour chacune des deux suites déterminer leurs **quatre premiers termes**. *Écrivez vos calculs.*

Correction de l'exercice 5

1) La suite (u_n) est définie par une formule ne dépendant que de n, il s'agit donc d'une génération explicite. La suite (w_n) quant à elle est définie par une relation de la forme $\mathrm{w}_{n+1} = f(\mathrm{w}_n)$, il s'agit donc d'une génération par récurrence.

2) Les quatre premiers termes de (u_n) sont :

$u_0 = -5\times0+2 = 2$, $\quad u_1 = -5\times1+2 = -3$, $\quad u_2 = -5\times2+2 = -8$, $\quad u_3 = -5\times3+2 = -13$.

Les quatre premiers termes de (w_n) sont :

$\mathrm{w}_0 = 5$, $\quad \mathrm{w}_1 = -2\times5+5 = -5$, $\quad \mathrm{w}_2 = -2\times(-5)+5 = 15$, $\quad \mathrm{w}_3 = -2\times15+5 = -25$.

Exercice 6 :

Déterminer le sens de variation des suites (u_n), (v_n) et (w_n) respectivement définies sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = n^2 - 3 \qquad \Big| \qquad \mathrm{v}_0 = -12, \quad \mathrm{v}_{n+1} = \mathrm{v}_n - \tfrac{\pi}{2} \qquad \Big| \qquad \mathrm{w}_n = \tfrac{1}{n} + 7$$

Correction de l'exercice 6

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule la différence : $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3 - (n^2 - 3) = 2n + 1$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 1 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{v}_{n+1} - \mathrm{v}_n = \left(\mathrm{v}_n - \frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{v}_n = -\frac{\pi}{2} < 0$. Ainsi, la suite (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on calcule la différence :

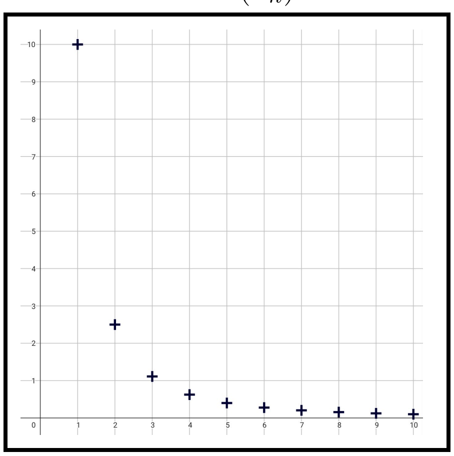
$$\mathrm{w}_{n+1} - \mathrm{w}_n = \left(\frac{1}{n+1} + 7\right) - \left(\frac{1}{n} + 7\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

La suite (w_n) est donc strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

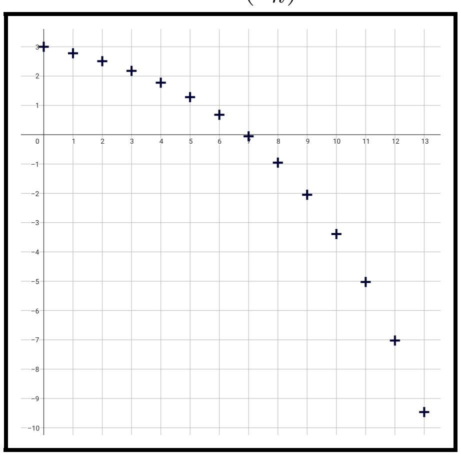
Exercice 7 :

Donner pour chacune des suites représentées ci-dessous, une conjecture pour leur limite (en utilisant la notation introduite en cours).

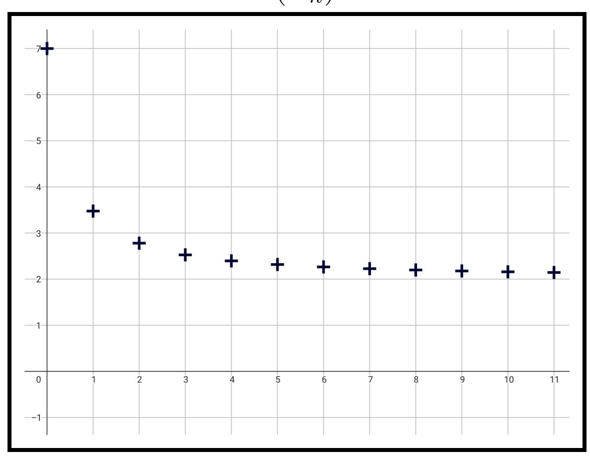
Suite (u_n)



Suite (v_n)



Suite (w_n)



Correction de l'exercice 7

Par lecture graphique, on peut conjecturer les limites suivantes :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{v}_n = -\infty, \qquad \lim_{n \to +\infty} \mathrm{w}_n = 2.$$