Chapitre 1 : Fonctions polynômes du second degré

Lycée Marcelin Berthelot - Aymé Petit

I/ Définition et forme canonique

Définitions

Une fonction **polynôme du second degré** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont une expression est

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

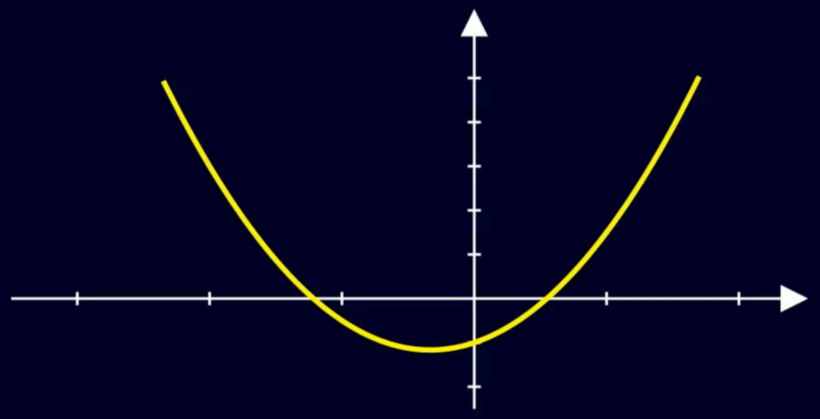
forme développée

La courbe représentative de f est une **parabole**.

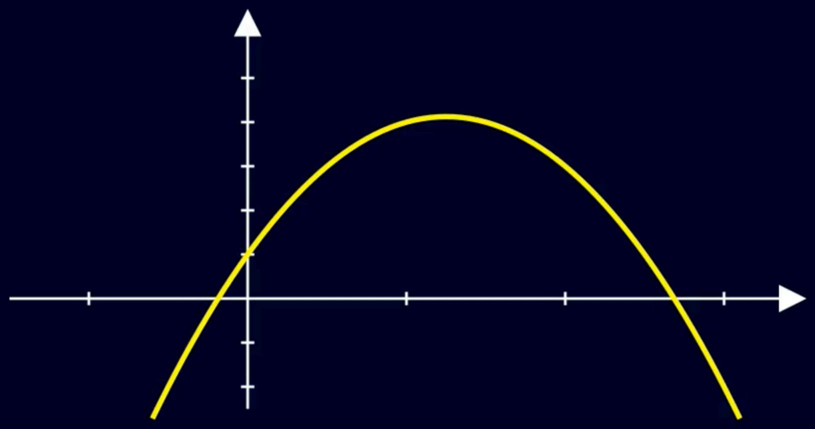
Exemples

$a = 1,5 > 0$ $\qquad$ $a = -2 < 0$

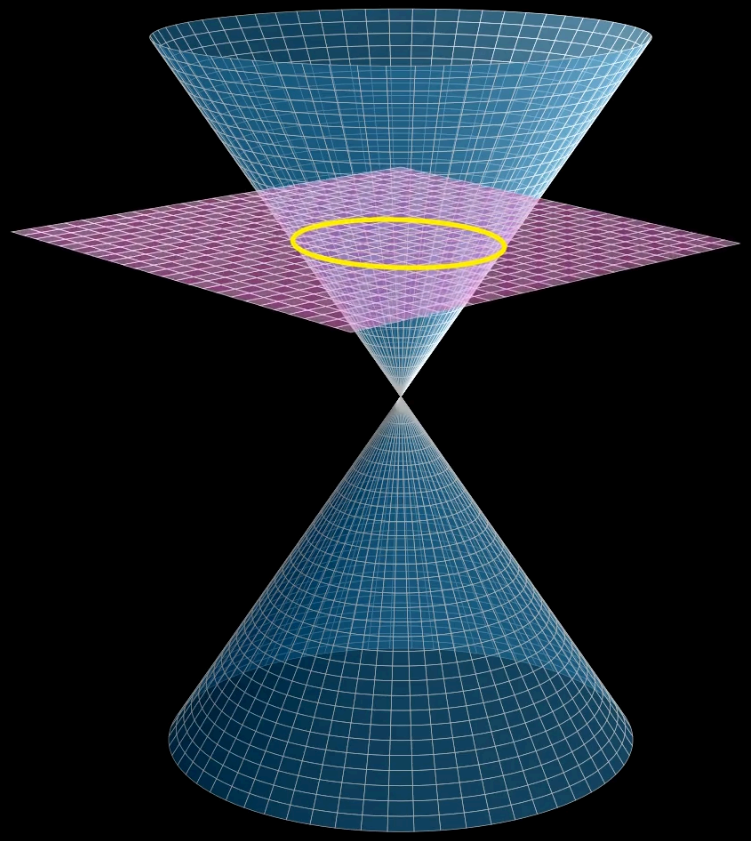
$$g(x) = 1,5x^2 + x - 1$$



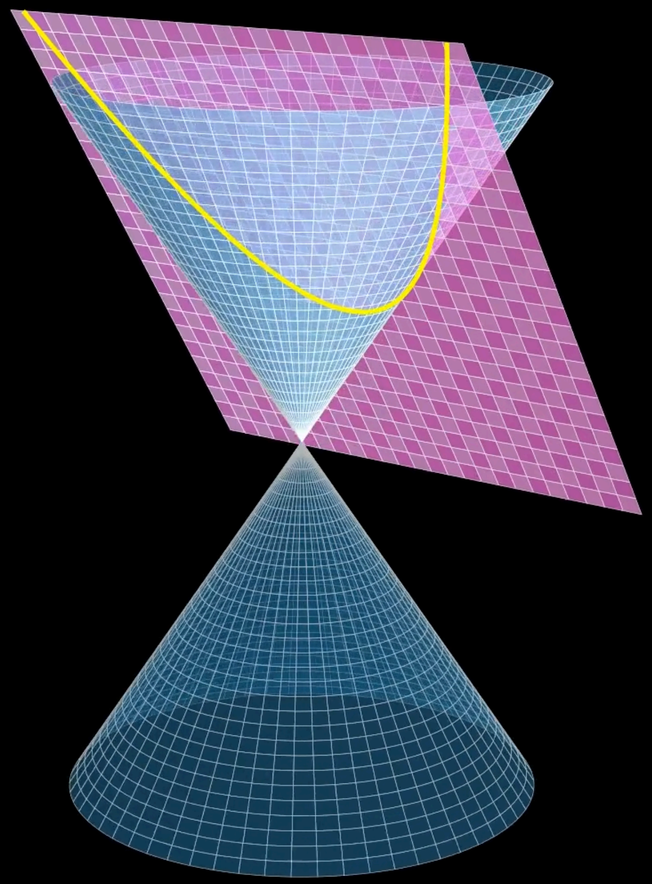
$$h(x) = -2x^2 + 5x + 1$$



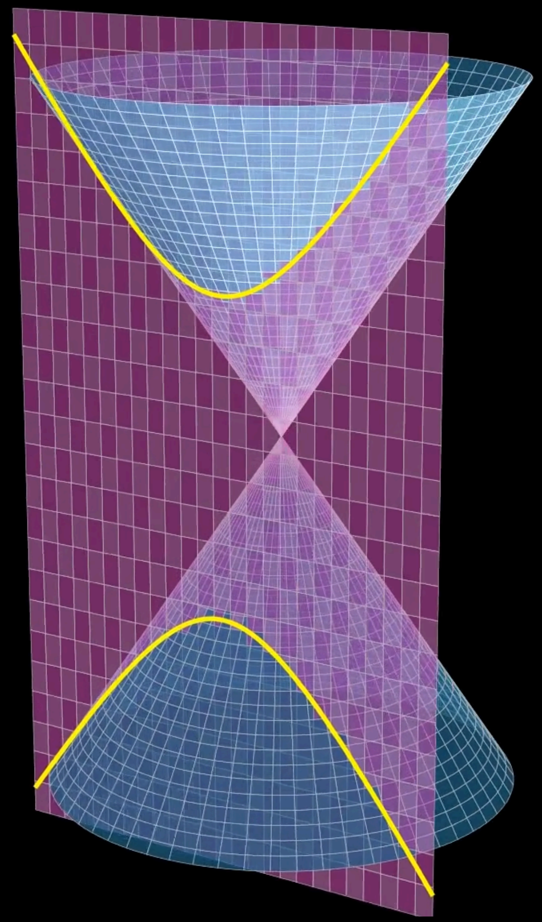
Ellipse



Parabole



Hyperbole



Dans la suite du cours, $f(x) = ax^2 + bx + c$
avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Définition / Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

avec $\underbrace{\boxed{\alpha = \frac{-b}{2a}}}_{\textbf{alpha}}$ et $\underbrace{\boxed{\beta = f(\alpha)}}_{\textbf{beta}} = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

C'est la **forme canonique** de f.

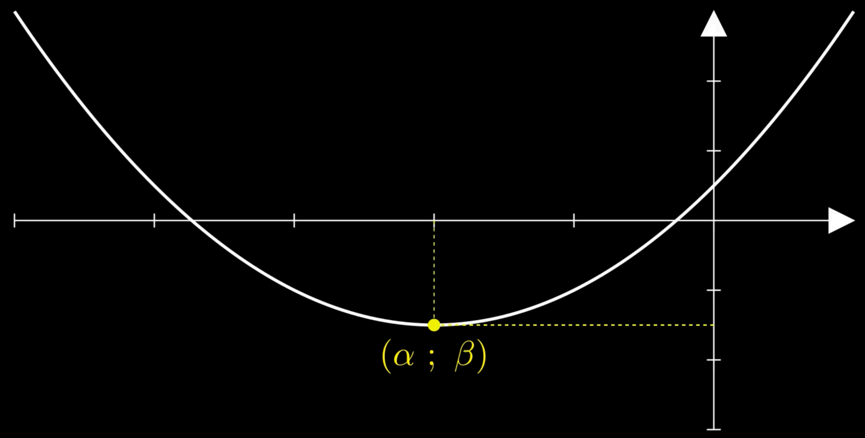
Propriété

Le **sommet** de la parabole a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$.

II/ Variations

Propriété

Si $a > 0$ alors f est strictement :
décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha]$ & croissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

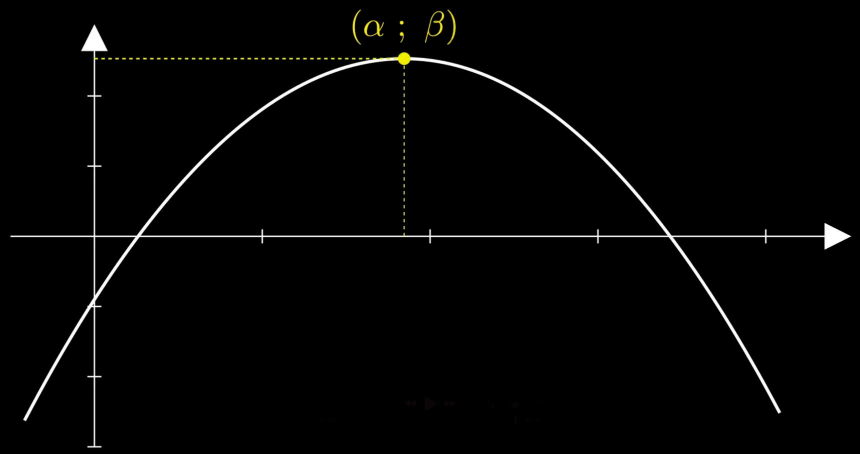


Mnémotechnie

$a > 0$ parabole tournée vers le haut

Propriété

Si $a < 0$ alors f est strictement :
croissante sur $\left]-\infty\ ;\ \alpha\right]$ & décroissante sur $\left[\alpha\ ;\ +\infty\right[$.

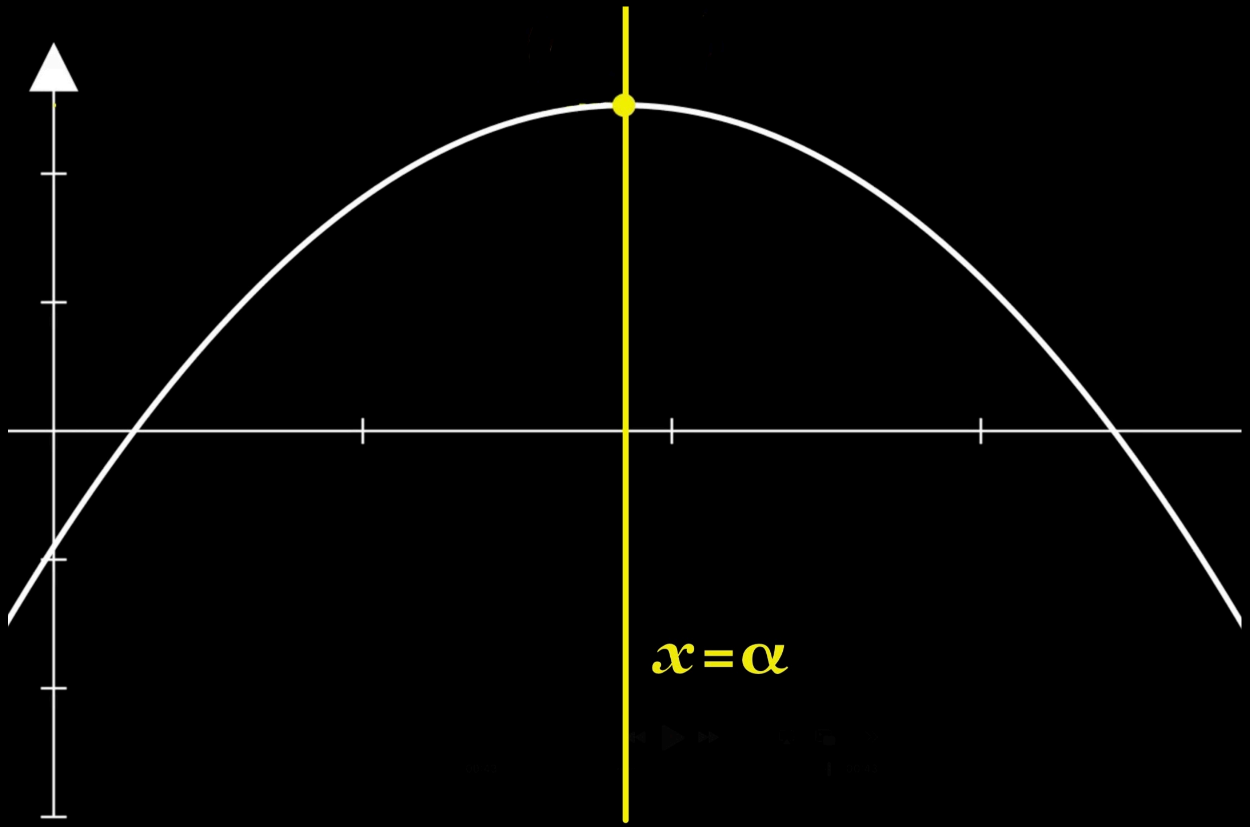


Mnémotechnie

$a < 0$ parabole tournée vers le bas

Propriété

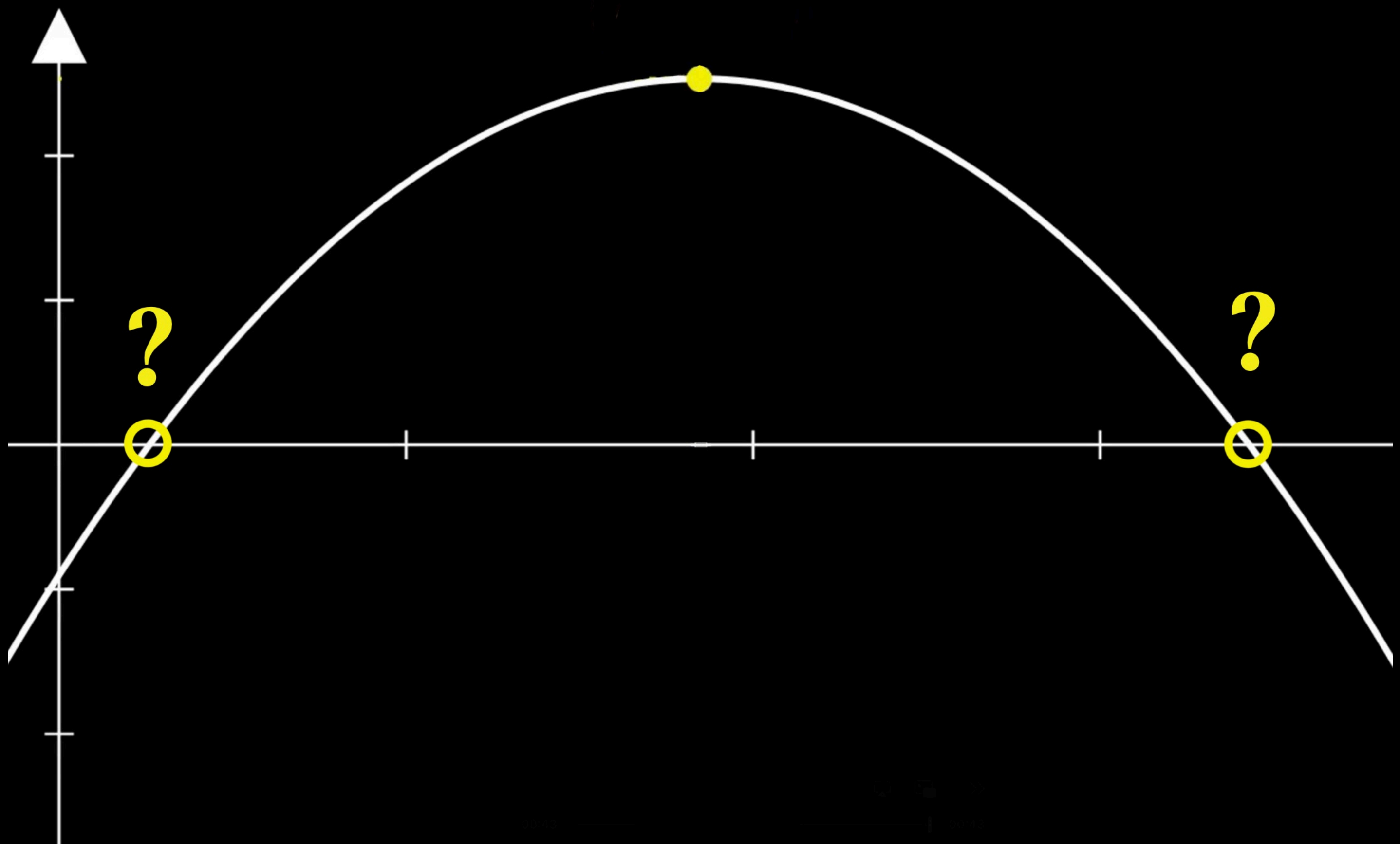
La parabole représentative de f a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.



III/ Équations du second degré

<u>Objectif :</u>

Résoudre l'équation $f(x) = 0$.



III/ Équations du second degré

1) Résolution

Définition

Une **équation du second degré** est une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (*)$$

(avec $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$).

Définition

$\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Théorème

✦ Si $\Delta < 0$, l'équation $(*)$ n'a pas de solution réelle.

✦ Si $\Delta = 0$, l'équation $(*)$ a une unique solution : $x_0 = \alpha$.

✦ Si $\Delta > 0$, l'équation $(*)$ a deux solutions réelles distinctes :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

2) Racines et factorisation

Définition

Une solution de $(*)$ s'appelle une **racine** (de f).

Propriété

- Lorsque $\Delta < 0$, f ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.
- Lorsque $\Delta = 0$, f se factorise en $a(x - x_0)^2$.
- Lorsque $\Delta > 0$, f se factorise en $a(x - x_1)(x - x_2)$.

Propriété

Soit x_1 et x_2 deux réels, et on pose $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$.

✦ Si x_1 et x_2 sont solutions de $x^2 + bx + c = 0$, alors $b = -S$ et $c = P$.

✦ Les solutions de l'équation du second degré $x^2 - Sx + P = 0$ sont x_1 et x_2.

❧ Fin de Chapitre ☙